תרגיל 9

מקדמים בינומיים

1. הוכח כי $\deg_p(m!)=\dfrac{m-\sigma_p(m)}{p-1}$

כאשר p ראשוני, $\deg_p x$ היא דרגה של p בפירוק של x למכפלה של ראשוניים, $\sigma_p(x)$ זאת סכום הספרות של x בבסיס ספירה p.

(זאת הייתה הטענה שדילגנו על ההוכחה שלה בהרצאה הראשונה במחנה. ממנה נובע כי $\deg_p\binom{m+n}{m}$ שווה לכמות המעברים בתרגיל חיבור של $m+n$ בבסיס ספירה p).

פתרון. הוכחנו כי $\deg_p(m!)=\left\lfloor\dfrac{m}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{m}{p^2}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{m}{p^3}\right\rfloor+\dots$.

כעת נרשום את m בבסיס ספירה p, בתור $m=\overline{a_k a_{k-1}\dots a_1 a_0}$ (הקו למעלה מסמן שהספרות מחוברות ולא מוכפלות). חלק שלם של חלוקה ב-p בבסיס ספירה p היא בעצם הזזה ימינה (תחשבו על חלוקה ב-10 בבסיס 10) ולכן:

$$\deg_p(m!)=\left\lfloor\frac{m}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m}{p^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m}{p^3}\right\rfloor+\dots=\overline{a_k a_{k-1}\dots a_1}+\overline{a_k a_{k-1}\dots a_2}+\dots+a_k=$$
$$=a_1+\overline{a_2a_2}+\overline{a_3a_3a_3}+\dots+\overline{a_k a_k\dots a_k}=a_1\cdot 1+a_2\cdot 11+a_3\cdot 111+\dots+a_k\cdot 11\dots1$$

כאשר הכול פה רשום בבסיס ספירה p.

בבסיס ספירה 10 הביטוי ל-1111 הוא $\dfrac{10^4-1}{9}$. דבר דומה קורה בבסיס p, רק ש-10 הוא p וצריך לחלק ב- $p-1$. ולכן

$$\deg_p(m!)=a_1\cdot 1+a_2\cdot 11+a_3\cdot 111+\dots+a_k\cdot 11\dots1=$$
$$=a_0\cdot\frac{1-1}{p-1}+a_1\cdot\frac{p-1}{p-1}+a_2\cdot\frac{p^2-1}{p-1}+\dots+a_2\cdot\frac{p^k-1}{p-1}=$$
$$=\frac{a_0+a_1p+a_2p^2+\dots+a_kp^k-(a_0+a_1+a_2+\dots+a_k)}{p-1}=\frac{m-\sigma_p(m)}{p-1}$$

מש"ל.

2. נניח כי $m=\overline{m_l m_{l-1}\dots m_1 m_0}$, $n=\overline{n_l n_{l-1}\dots n_1 n_0}$ בבסיס ספירה p (הקו למעלה – זה סימון לכך שמצמידים את הספרות בשביל ליצור מספר ולא מכפילים אותם). הוכח כי

$$\binom{n}{m}=\binom{n_0}{m_0}\cdot\binom{n_1}{m_1}\cdot\binom{n_2}{m_2}\cdot\ldots\cdot\binom{n_l}{m_l}\pmod p.$$

פתרון. נעשה חישוב מודולו p:

$$(1+x)^n = (1+x)^{n_0}\cdot(1+x)^{p\cdot n_1}\cdot(1+x)^{p^2\cdot n_2}\cdot(1+x)^{p^3\cdot n_3}\cdot\ldots\cdot(1+x)^{p^l\cdot n_l} =$$
$$= (1+x)^{n_0}\cdot\left(1+x^p\right)^{n_1}\cdot\left(1+x^{p^2}\right)^{n_2}\cdot\left(1+x^{p^3}\right)^{n_3}\cdot\ldots\cdot\left(1+x^{p^l}\right)^{n_l} =$$
$$= \sum_{k_0=0}^{n_0}\binom{n_0}{k_0}x^{k_0}\cdot\sum_{k_1=0}^{n_1}\binom{n_1}{k_1}x^{p\cdot k_1}\cdot\sum_{k_2=0}^{n_2}\binom{n_2}{k_2}x^{p^2\cdot k_2}\cdot\ldots\cdot\sum_{k_l=0}^{n_l}\binom{n_l}{k_l}x^{p^l\cdot k_l} \pmod p$$

(כאן x הוא משתנה אבסטרקטי שלאו דווקא מקיים את המשפט הקטן של פרמה.)

מכאן בפתיחת בסוגריים פשוטה רואים מהו מקדם של $x^{m_0+p\cdot m_1+p^2\cdot m_2+p^3\cdot m_3+\ldots+p^l\cdot m_l}$ הוא $\binom{n_0}{m_0}\cdot\binom{n_1}{m_1}\cdot\binom{n_2}{m_2}\cdot\ldots\cdot\binom{n_l}{m_l}$ מודולו p.

3. נסמן ב-c_n את מספר הדרכים לרשום בשורה n סוגריים ימניים ו-n סוגריים שמאליים באופן חוקי (למשל "(())" או "()()" חוקי, ואילו "())(()" או "())(" אינו חוקי).

א. הוכח את נוסחת הנסיגה: $c_n = c_{n-1}c_0 + c_{n-2}c_1 + c_{n-3}c_2 + \ldots + c_0c_{n-1}$.

ב.* מצא ביטוי מפורש ל-c_n.

פתרון. לשם נוחות, נניח כי כותבים את שורת הסוגריים משמאל לימין.

א. ניקח את האיבר הראשון בסדרה – זה סוגר שמאלי. חייב להיות בשורה סוגר ימני שמתאים לו. בין שני הסוגריים האלה יש תת-שורה תקנית של k זוגות סוגריים (כאשר k הוא מספר כלשהו בין 0 לבין $n-1$), ואחריהם יש תת-שורה תקנית של $n-k-1$ זוגות סוגריים. עבור k נתון יש c_kc_{n-k-1} זוגות כאלה, ועכשיו צריך לסכם את זה על k.

ב. נגיד שאנחנו מבצעים טיול על דף משבצות: קוראים את השורה לפי הסדר, וכל פעם אם רשום סוגר שמאלי, אז הולכים צעד אחד ימינה, ואם רשום סוגר ימני, הולכים צעד אחד למעלה. בצורה כזאת נקבל מסלול שמתחיל בנקודה $(0,0)$ ומסתיים בנקודה (n,n).

מספר של כל המסלולים שהולכים למעלה וימינה בינ שתי הנקודות הללו הוא $\binom{2n}{n}$.

אבל אנחנו לא רוצים לספור את כל המסלולים, אלה רק מסלולים טובים: כלומר כאלה, שבהם באף רגע לא עשינו יותר צעדים ימינה מאשר למעלה. כלומר, מסלולים כאלה שבהם אף פעם לא דרכנו על קו ישר $y = x + 1$.

במקום לספור מסלולים טובים, נספור את כל המסלולים. כלומר, מסלולים שמתחילים ב-$(0,0)$ ומסתיימים ב-(n,n) שמורכבים מצעדים למעלה וימינה שכן דורכים על האלכסון האדום $y = x + 1$.

טענה. כמות המסלולים הרעים שווה ל-$\binom{2n}{n-1}$.

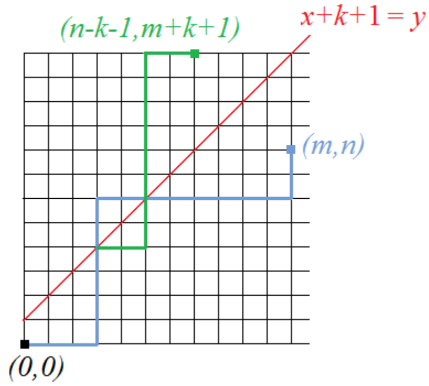
בהסתמך על טענה קל לסיים את הפתרון. אכן כמות המסלולים הטובים שווה ל-

$$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=(2n)!\frac{n+1-n}{n!(n+1)!}=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

נשאר להוכיח את הטענה.

הוכחת הטענה. נוכיח את הטענה באמצעות בניית התאמה בין מסלולים רעים מ-(0,0) ל-(n,n) לבין הקבוצה של כל המסלולים הקצרים מ-(0,0) ל-$(n–1, n+1)$. ההתאמה היא כזאת: לוקחים את כל החלק של המסלול מהרגע שבו הוא הגיע לראשונה לאלכסון האדום. קל לראות שזאת התאמה בין קבוצות, לכן הקבוצות הן באותו גודל.

הערה. מספרים c_n נקראים מספרי Catalan. הם נותנים תשובה להרבה שאלות, למשל:
נתון מצולע קמור בעל $n+2$ קודקודים. רוצים לחלק אותו למשולשים על ידי $n-1$ אלכסונים. בכמה דרכים אפשר לעשות זאת?
מספרי Catalan נותנים תשובה לעוד הרבה שאלות, למשל ספירת עצים, ספירת עצים בינאריים, ועוד.



בעצם אפשר לשאול שאלה יותר כללית: נניח שיש תור של $m+n$ ילדים, של-n מהם יש מטבע של 5 ₪ ול-m יש מטבע של 10 ₪. גלידה עולה 5 ₪, ולקופאית בהתחלה יש r מטבעות של 5 ₪. בכמה דרכים אפשר לסדר את התור כך שהוא לא יתקע באמצע?
שאלה של מספרי Catalan היא מקרה פרטי של השאלה הזאת עבור $m = n$ אם בהתחלה אין עודף. גם התשובה לשאלה כללית היא הפרש של שני מקדמים בינומיים, והוכחה היא אותה הוכחה (באמצעות שיקוף).

4.* הוכח שכל שני מספרים שנמצאים באותה שורה של משולש פסקל וגדולים מ-1 בהכרח לא זרים (כלומר יש להם מחלק משותף שגדול מ-1).

פתרון. ניקח את שני המקדמים $\binom{n}{k},\binom{n}{l}$. מותר להניח ללא הגבלת הכלליות[1] כי $k,l\le\frac{n}{2}$.

אז אפשר להגדיר את המקדם הטרינומי $T=\frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}$, והוא מתחלק בשני המקדמים הבינומיים. בשביל להוכיח שהם לא זרים מספיק לבדוק כי מכפלתם קטנה ממש מ-T.

[1] **"מותר להניח ללא הגבלת הכלליות"** זהו טריק חשוב בבנייה ורישום של הוכחות. אומרים את זה לפני שמשמיעים טענה שהיא לא נכונה, אבל היא מספיק כללית בשביל שיהיה מספיק להוכיח את מה שמבקשים רק במקרה הזה. כך אנחנו מוסיפים הנחה שיכולה להקל עלינו, למשל לחסוך בדיקת מקרים.

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n!}{l!(n-l)!}>\frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}$$

במילים אחרות, מספיק לבדוק כי $\frac{n!}{(n-k)!}>\frac{(n-l)!}{(n-k-l)!}$.

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots>(n-l)(n-l-1)(n-l-2)\cdot\ldots$$

בכל אגף יש k גורמים, וברור שהגורמים המתאימים משמאל גדולים מהגורמים המתאימים מימין.

5.** הוכח כי $p\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p-kq)^{k-1}(r+kq)^{n-k}=(p+r)^{n}$

כאשר n טבעי, p, q, r ממשיים, p שונה מ-0.

הערה. הזהות הזאת נקראת זהות **אבל**, על שם מתמטיקאי נורבגי מפורסם שגילה אותו (ועוד הרבה דברים).

פתרון. הפתרון מסתמך על טריק שהוא חשוב לאולימפיאדות: אם יש בשאלה n (מספר טבעי) אז אולי (!) כדאי לנסות אינדוקציה על n.

הבסיס של אינדוקציה די פשוט: כאשר $n = 1$, הסכום הוא של שני מחוברים ומקבלים

$p\left(\frac{1}{p}\cdot r+1\right)=(p+r)^{1}$, וזה ברור.

להוריד דרגה אפשר באמצעות נגזרת. נגזור לפי r:

$$p\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(p-kq)^{k-1}\cdot(n-k)(r+kq)^{n-k-1}=n(p+r)^{n-1}$$

מצמצמים n ו- $n-k$, ומקבלים זהות מאותה צורה עבור n נמוך יותר.

כמובן, אם נגזרת של פונקציה מתאפסת, זה לא אומר שפונקציה מתאפסת. זה בסה"כ אומר שפונקציה קבועה. לכן בשביל להשלים את ההוכחה מספיק לבדוק את הזהות עבור r מסוים, למשל $r = -p$.

$$p\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p-kq)^{k-1}(-p+kq)^{n-k}=0$$

$$p\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p-kq)^{n-1}(-1)^{n-k}=0$$

נוכיח טענה יותר כללית: לכל פולינום P שדרגתו קטנה מ-n, מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}P(k)=0.$$

את הטענה אפשר להוכיח באינדוקציה. עבור $n=1$ הפולינום הוא קבוע, לכן

$$P(0)-P(1)=0$$

עבור n כללי, בהנחה שהוכחנו עבור כל n נמוך יותר:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}P(k)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right)P(k)=$$

$$=\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\binom{n-1}{l}\big(P(l)-P(l+1)\big)$$

הדרגה של פולינום $P(x)-P(x+1)$ קטנה מהדרגה של פולינום $P(x)$, לכן הביטוי שווה ל-0 לפי הנחת אינדוקציה.