תרגיל 9

מקדמים בינומיים

1. הוכח כי $\deg_p(m!) = \dfrac{m-\sigma_p(m)}{p-1}$

כאשר p ראשוני, $\deg_p x$ היא דרגה של p בפירוק של x למכפלה של ראשוניים, $\sigma_p(x)$ זאת סכום הספרות של x בבסיס ספירה p.

(זאת הייתה הטענה שדילגנו על ההוכחה שלה בהרצאה הראשונה במחנה. ממנה נובע כי $\deg_p\binom{m+n}{m}$ שווה לכמות המעברים בתרגיל חיבור של $m + n$ בבסיס ספירה p).

2. נניח כי $m=\overline{m_l m_{l-1}...m_1 m_0}$, $n=\overline{n_l n_{l-1}...n_1 n_0}$ בבסיס ספירה p (הקו למעלה – זה סימון לכך שמצמידים את הספרות בשביל ליצור מספר ולא מכפילים אותם). הוכח כי $\binom{n}{m} \equiv \binom{n_0}{m_0}\cdot\binom{n_1}{m_1}\cdot\binom{n_2}{m_2}\cdot...\cdot\binom{n_l}{m_l} \pmod p$.

3. נסמן ב-c_n את מספר הדרכים לרשום בשורה n סוגריים ימניים ו-n סוגריים שמאליים באופן חוקי (למשל "(())" או "()()" חוקי, ואילו "))((" או "())(" אינו חוקי).

א. הוכח את נוסחת הנסיגה: $c_n = c_{n-1}c_0 + c_{n-2}c_1 + c_{n-3}c_2 + ... + c_0 c_{n-1}$.

ב.* מצא ביטוי מפורש ל-c_n.

4.* הוכח שכל שני מספרים שנמצאים באותה שורה של משולש פסקל וגדולים מ-1 בהכרח לא זרים (כלומר יש להם מחלק משותף שגדול מ-1).

5.** הוכח כי $p\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p-kq)^{k-1}(r+kq)^{n-k} = (p+r)^n$

כאשר n טבעי, p, q, r ממשיים, p שונה מ-0.

בהצלחה!