תרגיל 8

1. מצא את המספר הטבעי הגדול ביותר N כזה שאי-אפשר לבנות מגדל בגובה N מבלוקים שהגובה שלהם 5 ו-7.

פתרון. קיימים 5 סוגים של מספרים שלמים: 5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4.
בסכומים של 5 ו-7 מספר פעמים אפשר ליצר:

א. כל מספר אי-שלילי מסוג 5k.
ב. כל מספר אי-שלילי מסוג 5k+2 החל מ-7.
ג. כל מספר אי-שלילי מסוג 5k+4 החל מ-14.
ד. כל מספר אי-שלילי מסוג 5k+1 החל מ-21.
ה. כל מספר אי-שלילי מסוג 5k+3 החל מ-28.

כאשר אנחנו משתמשים ב-0, 1, 2, 3, 4 שביעיות בהתאמה. לא נקבל מספרים אחרים אם נשתמש ביותר שביעיות, כי 5 שביעות אפשר להחליף ב-7 חמישיות.
מכאן רואים שהמספר המקסימלי שאי-אפשר לבנות הוא $23 = 5 - 28$.

הערה. קל להכליל (תנסו!) את זה לכל זוג של מספרים זרים במקום 5 ו-7. כמובן, עם יש מחלק משותף גדול מ-1, אז אפשר ליצר רק מספרים שמתחלקים במחלק המשותף המקסימלי.

2. א. הוכח שאפשר לחתוך ריבוע ל-2011 ריבועים.
ב. הוכח שאפשר לחתוך את הקובייה ל-5771 קוביות.

פתרון. א. אפשר לפרק ריבוע כלשהו ל-4 ריבועים (וזה יגדיל את כמות הריבועים ב-3).
באופן דומה אפשר לפרק כל ריבוע ל-9 ריבועים (וזה יגדיל את כמות הריבועים ב-8).
כאשר משתמשים בשני פעולות האלה מספיק פעמים, אפשר להוסיף כמעט כל מספר טבעי, לפחות כל מספר שגדול או שווה ל-$3·8=24$, הרי 3 ו-8 זרים (בדומה למה שהסברנו בשאלה ראשונה). לכן אם מתחילים מריבוע בודד, אז אפשר להגדיל את כמות הריבועים ב-2010 ולקבל 2011.
ב. באופן דומה לסעיף א', אפשר לחלק קובייה ל-8 או ל-27. לכן אפשר להגדיל את הכמות ב-7 או ב-26. לכן אפשר להוסיף כל מספר שגדול מ-7 כפול 26, ובטוח אפשר להוסיף כל מספר שגדול מ-10 כפול 30, והרי 5770 גדול מ-300.

3. כאשר מעלים מספר דו-ספרתי בריבוע ומוחקים את כל הספרות של המספר שהתקבל חוץ משני ספרות אחרונות (ספרת אחדות וספרת העשרות), מקבלים שוב את המספר המקורי. מהו המספר הדו-ספרתי? (מצא את כל התשובות)

פתרון. בעצם $x^2 = 100\cdot y + x$, כאשר x הוא המספר הדו-ספרתי.

אז $(x-1)x = x^2 - x = 100\cdot y$.

ובכן $x(x-1)$ צריך להתחלק ב-100. באופן שקול אפשר להגיד שזה מתחלק ב-25 וב-4.
הגורמים $x-1, x$ זרים, לכן רק אחד מהם מחלק ב-5, ורק אחד מהם מחלק ב-2. לכן
הגורם שמתחלק ב-2 חייב להתחלק ב-4, והגורם שמתחלק ב-5 מתחלק גם ב-25. לא יתכן
שאותו גורם מתחלק ב-4 וב-25, כי אין מספרים כאלה בין 0 ל-100. לכן גורם אחד
מתחלק ב-25 אבל לא ב-2, וגורם אחר מתחלק ב-4 אבל לא 25.
בתחום יש רק שניים מספרים שמתחלקים ב-25 אבל לא ב-2: זה 25 ו-75. הגורם האחר
צריך להיות במרחק 1 מהגורם הראשון, להתחלק ב-4, וזה נותן לנו רק שני זוגות 24, 25
או 75, 76. ובכן יש שני אופציות למספר הדו-ספרתי שמחפשים: 25 או 76.
בדיקה, $25^2 = 625$, וגם $76^2 = 5776$.

4. נסח והוכח סימני חלוקה ב-2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12.

נכתוב את המספר $N = \overline{a_k ... a_2 a_1 a_0} = a_0 + 10\cdot a_1 + 100\cdot a_2 + ... + 10^k a_k$ כאשר הקו למעלה
אומר שמצמידים את הספרות ולא מכפילים.

<u>5</u>: a_0 היא 0 או 5.

<u>2</u>: a_0 זוגית.

<u>4</u>: $\overline{a_1 a_0}$ מתחלק ב-4. במילים אחרות, a_0 זוגית, ובנוסף, אם a_0 מתחלקת ב-4, אז a_1
זוגית, ואם a_0 לא מתחלקתב-4, אז a_1 אי-זוגית. ניסוח נוסף: $a_0 + 2\cdot a_1$ מתחלק ב-4.

<u>8</u>: $\overline{a_2 a_1 a_0}$ מתחלק ב-8. במילים אחרות, אם a_2 זוגי, $a_0 + 2\cdot a_1$ חייב להתחלק ב-8, ואם
אם a_2 אי-זוגי, אז $a_0 + 2\cdot a_1$ חייב להתחלק ב-4 אבל לא ב-8.

<u>3</u>: סכום הספרות מתחלקת ב-3.

<u>9</u>: סכום הספרות מתחלקת ב-9.

<u>6</u>: מתחלק ב-2 וב-3.

<u>12</u>: מתחלק ב-4 וב-3.

<u>10</u>: a_0 היא 0.

<u>11</u>: $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ...$ מתחלק ב-11.

בשביל לנסח \ להוכיח סימן חלוקה ב-N, צריך להסתכל על
$a_0 + 10\cdot a_1 + 100\cdot a_2 + ... + 10^k a_k \pmod N$
כמובן, סימני חלוקה יפים מתקבלים כאשר ל- 10^k יש מחזור קצר מודולו N.

5. מספר $M = 2^n - 1$ הוא מספר ראשוני שגדול מ-3.

א. הוכח כי גם n ראשוני.

ב. הוכח שהספרה האחרונה של M היא 1 או 7.

הערה. מספרים ראשוניים מסוג זה נקראים מספרים ראשוניים של Mersenne.

פתרון. א. $a^m - b^m = (a-b)\left(a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + b^{m-1}\right)$. לכן אם n מתחלק ב-k,
אז $2^n - 1$ מחלק ב-$2^k - 1$, והוא לא ראשוני.

ב. ספרה אחרונה של 2^n מתנהגת כך:

$$1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6. 2, \ldots$$

כלומר אחרי 2^0 מתחיל מחזור באורך 4.

אנחנו מתעניינים רק באיברים האי-זוגיים, הרי מספר זוגי (אחרי 2) אינו ראשוני. לכן אם 2^n+1 ראשוני שגדול מ-3, אז 2^n מסתיים ב-2 או ב-8, והמספר עצמו מסתיים ב-1 או ב-7. למשל: $2^5 - 1 = 31$, $2^3 - 1 = 7$, כלומר שני האפשרויות מתקבלות.