תרגיל 7

1. נניח כי $a,b,c>0$. הוכח כי המספר הגדול ביותר מבין $a^2-a\ ,\ b^2-b\ ,\ c^2-c$ קטן או שווה למספר הגדול ביותר מבין $a^2-b\ ,\ b^2-c\ ,\ c^2-a$.

פתרון. הגרף של x^2-x הוא פרבולה עם הקרניים למעלה. לכן הערך המקסימלי שלה מבין הנקודות a,b,c יהיה או במספר הכי גדול או במספר הכי קטן. נבדוק את שני המקרים. בכל מקרה נוכל להניח ללא הגבלת הכלליות כי a^2-a הוא הגדול ביותר מבין שלושה מספרים מאותו סוג (אחרת אפשר להחליף a ב-b, את b ב-c, ואת c ב-a פעם או פעמיים).

א. נניח כי $a\le b,c$ אז $a^2-a\le c^2-a$ לכן a^2-a שהוא המספר הגדול מבין שלושה מספרים מאותו סוג קטן או-שווה מאשר המספר הגדול ביותר מבין המספרים $a^2-b\ ,\ b^2-c\ ,\ c^2-a$, מש"ל.

ב. נניח כי $a\ge b,c$ אז $a^2-a\le a^2-b$ לכן a^2-a שהוא המספר הגדול מבין שלושה מספרים מאותו סוג קטן או-שווה מאשר המספר הגדול ביותר מבין המספרים $a^2-b\ ,\ b^2-c\ ,\ c^2-a$. מש"ל.

2. עבור $a,b,c>0$ הוכח כי $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.

הערה. אי-שוויון זה נקרא אי-שוויון Nesbitt

טענת עזר. לכל מספר חיובי x, מתקיים אי-שוויון: $x+\frac{1}{x}\ge 2$.

הוכחת הטענה. זה שקול ל- $x^2+1\ge 2x$ כלומר $x^2-2x+1\ge 0$, אבל זה ברור כי $(x-1)^2\ge 0$. מש"ל.

מהטענה אפשר לקבל שני פתרונות:

פתרון ראשון. נוסיף 3 לשני האגפים:

$$\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{a+c}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)\ge\frac{9}{2}$$

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}\ge\frac{9}{2}$$

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 9$$

נסמן $n=b+c\ ,\ m=a+c\ ,\ k=a+b$ אז האי-שוויון מקבל צורה

$$\left(k+m+n\right)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\ge 9$$

$$3+\left(\frac{k}{m}+\frac{m}{k}\right)+\left(\frac{k}{n}+\frac{n}{k}\right)+\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)\ge 9$$

אבל מטענת עזר נובע כי $\frac{k}{m}+\frac{m}{k}\ge 2 \;,\; \frac{k}{n}+\frac{n}{k}\ge 2 \;,\; \frac{n}{m}+\frac{m}{n}\ge 2$

פתרון שני. נוסיף $\frac{3}{2}$ לשני האגפים:

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{b}{a+c}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{c}{a+b}+\frac{1}{2}\right)\ge 3$$

$$\frac{2a+b+c}{2\left(b+c\right)}+\frac{2b+a+c}{2\left(a+c\right)}+\frac{2c+a+b}{2\left(a+b\right)}\ge 3$$

נכפיל את שני האגפים ב-2 ונסמן $k=a+b \;,\; m=a+c \;,\; n=b+c$:

$$\frac{k+m}{n}+\frac{k+n}{m}+\frac{m+n}{k}\ge 6$$

$$\frac{k}{n}+\frac{m}{n}+\frac{k}{m}+\frac{n}{m}+\frac{m}{k}+\frac{n}{k}\ge 6$$

וזה סכום של שלושה אי-שוויונים שנובעים מטענת העזר:

$$\frac{k}{m}+\frac{m}{k}\ge 2 \;,\; \frac{k}{n}+\frac{n}{k}\ge 2 \;,\; \frac{n}{m}+\frac{m}{n}\ge 2$$

3. עבור $a,b,c>0$ הוכח כי $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}$.

פתרון. נוסיף $a+b+c$ לשני האגפים:

$$\left(\frac{a^2}{b+c}+a\right)+\left(\frac{b^2}{a+c}+b\right)+\left(\frac{c^2}{a+b}+c\right)\ge\frac{3}{2}\left(a+b+c\right)$$

$$\frac{a^2+ab+ac}{b+c}+\frac{b^2+ba+bc}{a+c}+\frac{c^2+ca+cb}{a+b}\ge\frac{3}{2}\left(a+b+c\right)$$

$$\left(a+b+c\right)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\ge\frac{3}{2}\left(a+b+c\right)$$

אפשר לצמצם $a+b+c$ ולקבל

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$$

ואת זה אנחנו כבר יודעים (מהשאלה הקודמת).

4.* עבור $a,b,c>0$ הוכח כי $a^3+b^3+c^3+3abc\ge a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b$.

פתרון ראשון. ללא הגבלת הכלליות, ניתן להניח כי a הוא הקטן מבין המספרים, וכי $c=a(1+m)$, $b=a(1+k)$ כאשר $k,m\ge 0$. כשנציב את הביטויים האלה יהיה a^3 כפול משהו בכל מקום, ואחרי שנצמצם a^3 נקבל:

$$1+(1+k)^3+(1+m)^3+3(1+k)(1+m)\ge$$
$$\ge(1+k)^2(1+m)+(1+m)^2(1+k)+(1+k)^2+(1+k)+(1+m)^2+(1+m)$$

לאחר פתיחת סוגריים נקבל:

$$6+3k^2+3k+k^3+3m^2+3m+m^3+3k+3m+3km\ge$$
$$\ge\left(1+2k+k^2\right)(1+m)+\left(1+2m+m^2\right)(1+k)+4+2k+k^2+2m+m^2+k+m$$

$$2+2k^2+3k+k^3+2m^2+3m+m^3+3km\ge$$
$$\ge 1+2k+k^2+m+2mk+mk^2+1+2m+m^2+k+2km+km^2$$

$$k^2+k^3+m^2+m^3\ge mk+mk^2+km^2$$

זה מתפרק לסכום של שני אי-שוויונים פשוטים:

א. $k^2+m^2\ge mk$

ב. $k^3+m^3\ge mk^2+km^2$

את א' קל לפרק לסכום ריבועים: למשל $\left(k-\frac{m}{2}\right)^2+\frac{3}{4}m^2\ge 0$.

גם ב' לא קשה:

$$k^3-k^2m-km^2+m^3=k^2(k-m)-(k-m)m^2=$$
$$=(k-m)\left(k^2-m^2\right)=(k-m)^2\cdot(k+m)\ge 0$$

פתרון שני. אפשר להעתיק את האי-שוויון באופן שקול:

$$abc\ge(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

(קל לראות באמצעות פתיחת סוגריים שזה שקול לאי-שוויון הראשון).

אם אחד הגורמים באגף הימני שלילי, זה אומר שאחד מבין המספרים a, b, c גדול מסכום של שני האחרים, לכן אז בדיוק אחד מהם שלישי, ואז אי-שוויון ברור, לכן המקרה המעניין היחיד זה כאשר כל הגורמים באגף הימני חיוביים (במילים אחרות a, b, c – צלעות המשולש).

ובכן, בהנחה ששני האגפים חיוביים, אפשר להעלות את שניהם בריבוע:

$$a^2b^2c^2\ge(a+b-c)^2(a+c-b)^2(b+c-a)^2$$

זה מתקבל ממכפלה של 3 אי-שוויונים:

$$a^2\ge(a+b-c)(a+c-b)=a^2-(b-c)^2$$

ועוד שני אי-שוויונים מאותו סוג. מש"ל.

פתרון שלישי. אפשר להעתיק את האי-שוויון שצריך להוכיח בצורה כזאת:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-b)(c-a)\geq 0$$

בגלל שיש באי-שוויון הזה סימטריה מוחלטת, ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות כי $a\leq b\leq c$. במקרה הזה המחובר הראשון והשלישי חיובים, והשני – שלילי. אז

$$c(c-b)(c-a)\geq b(b-a)(c-b)$$

הרי $(c-b)\geq(b-a)$ ו- $c\geq b$. לכן באי-שוויון הקודם מקבלים ביטוי אי-שלילי (אפילו מהסכום של שני מחוברים אחרונים, ובטוח ביחד אם המחובר הראשון).

5.** עבור a,b,c ממשיים הוכח כי

$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-a)(b-c)+c^2(c-a)(c-b)\geq 0 .$$

פתרון ראשון: $\frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(a^2-c^2-ab+bc\right)^2\geq 0$. אכן,

$$\left(a^2-c^2-ab+bc\right)^2\geq$$
$$\geq a^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2-2a^2c^2-2a^3b-2c^3b+2a^2bc+2c^2ab-2b^2ac$$

קל לראות שחצי-סכום של שלושה ביטויים מהסוג הזה ייתן את הביטוי שצריך.

פתרון שני. אנחנו נוכיח אי-שוויון שמכליל בו-זמנית את השאלה הזאת והשאלה הקודמת. נניח שמספרים a, b, c נמצאים בתחום שבו לפונקציה f ערכים חיוביים, וכזאת שבכל קטע בתחום זה המקסימום של f מתקבל בקצה של הקטע. דוגמאות לפונקציות כאלה:

א. לכל k ממשי x^k בתחום $x>0$.
ב. באופם כללי יותר, כל פונקציה מונוטונית
ג. x^2 בכל הישר הממשי
ד. באופן כללי יותר, כל פונקציה קמורה בעלת ערכים חיוביים
ה. כל פונקציה (עם ערכים אי-שליליים) שיורדת עבור $x<l$ ועולה עבור $x>l$.

ובכן, בהינתן פונקציה כזאת, מתקיים אי-שוויון:

$$\boxed{f(a)\cdot(a-b)(a-c)+f(b)\cdot(b-a)(b-c)+f(c)\cdot(c-b)(c-a)\geq 0}$$

אי-שוויון זה נקרא אי-שוויון שור ע"ש מתמטיקאי יהודי מפורסם ישי שור (Schur).
שאלה 3 היא מקרה פרטי עבור $f(x)=x$ ושאלה 4 היא מקרה פרטי עבור $f(x)=x^2$.

נוכיח את אי-שוויון שור. אפשר להניח ללא הגבלת הכלליות כי $a\leq b\leq c$. אז המחובר הראשון והשלישי חיוביים, והמחובר השני שלילי. קל לראות כי

$$(c-b)(c-a)\geq(c-b)(b-a)$$
$$(b-a)(c-a)\geq(b-a)(c-b)$$

אבל לפי נתון $f(b)$ קטן או שווה מאשר $f(a)$ או מאשר $f(c)$. במקרה הראשון סכום של מחובר הראשון והשני באי-שוויון שור אי-שלילי, ובמקרה השני סכום של מחובר השני והשלישי אי-שלילי, בכל מקרה האגף השמאלי חיובי.