תרגיל 6

(חשבון שטחים)

1. יהי ABC משולש משוכלל, ו-P נקודה בתוכו. נסמן את המרחקים מ-P לצלעות המשולש ב-k, l, m ואת אורך הגובה שלו ב-h. הוכח $k + l + m = h$.

פתרון. נסמן ב-a את אורך הצלע של משולש ABC. שטח של ABC הוא $\frac{ah}{2}$. שטחים של המשולשים PAB, PBC, PCA הם $\frac{ak}{2}, \frac{al}{2}, \frac{am}{2}$, והם ביחד מכסים את ABC, לכן $\frac{ak}{2}+\frac{al}{2}+\frac{am}{2}=\frac{ah}{2}$. נצמצם את $\frac{a}{2}$ ונקבל מש"ל.

2. נתונים: אורכי שתי צלעות במשולש: $BC = a$, $AC = b$, וזווית $ACB = \gamma$.
מצא את אורך חוצה הזווית מנקודה C באמצעות נתונים אלה.

פתרון. נסמן את הקצה האחר של חוצה זווית ב-L, ואת אורך החוצה זווית AL ב-l.
אז $S_{\mathrm{ABC}}=\frac{ab\sin\gamma}{2}$. באותו אופן $S_{\mathrm{ALC}}=\frac{lb\sin\gamma}{2}$, $S_{\mathrm{LBC}}=\frac{al\sin\gamma}{2}$. לפיכך:

$$\frac{ab\sin\gamma}{2}=S_{\mathrm{ABC}}=S_{\mathrm{ALC}}+S_{\mathrm{LBC}}=\frac{al\sin(\gamma/2)}{2}+\frac{lb\sin(\gamma/2)}{2}$$

$$ab\sin\gamma=al\sin\frac{\gamma}{2}+lb\sin\frac{\gamma}{2}$$

נחלק את הכל ב-$abl\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$.

$$\frac{1}{l}2\cos\tfrac{\gamma}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$$

נהפוך את שני האגפים (כלומר נחליף כל מספר באחד חלקי המספר).

$$\frac{l}{2\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{ab}{a+b}$$

$$\boxed{l=\frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}}$$

הערה. המספר $\frac{2ab}{a+b}$ נקרא ממוצע הרמוני של a,b.

3. מצולע $A_1A_2A_3\ldots A_{2n}$ חסום במעגל. B נקודה על אותו המעגל. המרחקים מהנקודה B לישרים $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{2n}A_1$ שווים ל-$d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ בהתאמה.
הוכח כי $d_1d_3\cdot\ldots\cdot d_{2n-1}=d_2d_4\cdot\ldots\cdot d_{2n}$.

פתרון. שטח של משולש BA_kA_{k+1} הוא מצד אחד $\frac{BA_k \cdot BA_{k+1} \cdot A_kA_{k+1}}{4R}$ ומצד שני $\frac{d_k \cdot A_kA_{k+1}}{2}$. היות ושני הנוסחאות נותנות את אותה התשובה, $\frac{BA_k \cdot BA_{k+1}}{4R} = \frac{d_k}{2}$.

כלומר $\frac{BA_k \cdot BA_{k+1}}{2R} = d_k$. לכן:

$$d_1 \cdot d_3 \cdot \ldots \cdot d_{2n-1} = \frac{BA_1 \cdot BA_2}{2R} \cdot \frac{BA_3 \cdot BA_4}{2R} \cdot \ldots \cdot \frac{BA_{2n-1} \cdot BA_{2n}}{2R} =$$

$$= \frac{BA_2 \cdot BA_3}{2R} \cdot \frac{BA_4 \cdot BA_5}{2R} \cdot \ldots \cdot \frac{BA_{2n} \cdot BA_1}{2R} = d_2 \cdot d_4 \cdot \ldots \cdot d_{2n}$$

מש"ל.

4. O הוא מרכז של מעגל שחסום במרובע ABCD.
אמצעי האלכסונים של המרובע הם M, N.
הוכח כי M, O, N נמצאים על ישר אחד.

פתרון. נגדיר פונקציה, שמוגדרת לכל נקודה X בתוך מרובע ABCD:

$$s(X) = S_{XAB} - S_{XBC} + S_{XCD} - S_{XDA}$$

נשאיר כתרגיל לקוראים את שני הטענות הבאות:

א. $s(M) = 0 \quad ; \quad s(N) = 0 \quad ; \quad s(O) = 0$

ב. $s(X)$ היא פונקציה ליניארית (כלומר היא מהצורה $ax + by + c$ כאשר x, y הן קואורדינאטות של X).

מכאן אפשר לראות שיש שני אפשרויות. או ש-$s(X) = 0$ לכל X במרובע ABCD, או שקבוצת האפסים של s היא קו ישר. במקרה האחרון מקבלים ש-M, O, N על ישר אחד.
במקרה האחר $0 = s(B) = S_{BCD} - S_{BDA}$, כלומר A ו-C נמצאים במרחק זהה מ-BD.
כלומר BD חוצה את AC. באופן דומה אם נציב את A, יתקבל ש-AC חוצה את BD.
לכן M ו-N זו אותה נקודה, ולכן M, O, N הן על אותו ישר.

הערה. בעצם בשביל להפוך שטח של משולש ABX לפונקציה ליניארית בכל המישור צריך להגדיר "שטח מכוון", שיהיה שווה לשטח רגיל בצד אחד של המישור יחסית לישר AB, ויהי שווה למינוס השטח הרגיל בצד השני של ישר AB. בשאלה הזאת זה לא משנה, כי אנחנו יכולים להתייחס רק לנקודות הפנימיות של מרובע ABCD.
כדאי לדבר על שטח מכוון, כי ליניאריות מאפשרת לכתוב נוסחאות פשוטות (למשל, כך אפשר לפתח נוסחה לשטח של מצולע לפי קואורדינאטות של הקודקודים).

5. ABCD מרובע קמור. המשכי הצלעות AB ו-CD נחתכים בנקודה O. נסמן את אורכי הצלעות $s = \mathrm{AB}$, $t = \mathrm{CD}$. הישר העובר דרך אמצעי האלכסונים חותך את הישרים AB, CD בנקודות S, T בהתאמה. הוכח כי $\frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{OT}} = \frac{s}{t}$.

פתרון. נגדיר פונקציה $d\left(\mathrm{X}\right) = S_{\mathrm{ABX}} + S_{\mathrm{CDX}}$. זאת פונקציה ליניארית בתוך זווית שקודקוד O וצלעותיה AB ו-CD וגם בזווית הנגדית, (ואפשר להרחיב אותה לפונקציה ליניארית אל כל המישור עם משתמשים בשטח מכוון, כמו שהוסבר בהערה בסוף של פתרון של שאלה הקודמת). נסמן ב-M, N את אמצעי האלכסונים AC, BD בהתאמה.

$$d\left(\mathrm{M}\right) = S_{\mathrm{ABM}} + S_{\mathrm{CDM}} = \frac{S_{\mathrm{ABC}}}{2} + \frac{S_{\mathrm{ADC}}}{2} = \frac{S_{\mathrm{ABCD}}}{2}$$

$$d\left(\mathrm{N}\right) = S_{\mathrm{ABN}} + S_{\mathrm{CDN}} = \frac{S_{\mathrm{ABD}}}{2} + \frac{S_{\mathrm{CDB}}}{2} = \frac{S_{\mathrm{ABCD}}}{2}$$

פונקציה d אינה קבוע, הרי $d\left(\mathrm{O}\right) = 0$. לכן הנקודות שעבורן $d\left(\mathrm{X}\right) = \frac{S_{\mathrm{ABCD}}}{2}$ זה קו ישר.

קו ישר זה מכיל את M ואת N, ולכן גם את הנקודות S ו-T.

$$S_{\mathrm{ABT}} = d\left(\mathrm{T}\right) = \frac{S_{\mathrm{ABCD}}}{2} = d\left(\mathrm{S}\right) = S_{\mathrm{CDS}}$$

נסמן ב-h_{S}, h_{T} את הגבהים של משולשים ABT, CDS מהקודקודים S, T בהתאמה.

אז לפי הזהות הקודמת:

$$\mathrm{AB} \cdot h_{\mathrm{T}} = \mathrm{CD} \cdot h_{\mathrm{S}}$$

לכן:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}} = \frac{h_{\mathrm{S}}}{h_{\mathrm{T}}} = \frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{OT}}$$

בגלל דמיון משולשים. מש"ל.