תרגיל 5

1. יהי p,q מספרים ראשוניים אי-זוגיים עוקבים (כלומר כאלה שאין מספרים ראשוניים נוספים בין p לבין q). הוכח כי $p + q$ זאת מכפלה של שלושה מספרים הגדולים מ-1.

פתרון. $\frac{p+q}{2}$ אינו ראשוני כי הוא נמצא p לבין q, לכן הוא פריק: $\frac{p+q}{2} = a \cdot b$.
לכן $p+q = 2 \cdot a \cdot b$.

2. מצא את כל המספרים הראשוניים p כאלה שגם $2p^2 + 1$ ראשוני.

פתרון. קיימים 3 סוגים של מספרים: $3k, 3k + 1, 3k - 1$. אם $p = 3k \pm 1$ אז
$2p^2 + 1 = 2(3k \pm 1)^2 + 1 = 2(9k^2 \pm 6k + 1) + 1 = 18k^2 \pm 12k + 3 = 3m$.
לכן זה לא מספר ראשוני, כי הוא מתחלק ב-3 (והוא גדול מ-3 בכל מקרה).
נשאר לבדוק מקרה של $p = 3k$. זה יהיה ראשוני, רק אם זה 3 (כי זה מתחלק ב-3).

3. מצא את כל המספרים הראשוניים מהצורה $m^4 + 4n^4$, כאשר m, n שלמים.

פתרון. אפשר להניח ללא הגבלת הכלליות ש-m,n לא שליליים (אחרת אפשר להחליף את הסימן שלהם).

$$m^4 + 4n^4 = m^4 + 4m^2n^2 + 4n^4 - 4m^2n^2 = \left(m^2 + 2n^2\right)^2 - (2mn)^2 =$$
$$= \left(m^2 - 2mn + 2n^2\right)\left(m^2 + 2mn + 2n^2\right)$$

לכן זה מכפלה של שני מספרים. אם המספר ראשוני, הקטן מבין שני הגורמים שווה ל-1. ולכן $1 = m^2 - 2mn + 2n^2$. כלומר $1 = (m-n)^2 + n^2$. אם סכום של שני ריבועים שלמים שווה 1, אז אחד מהם 0, והשני 1. זה משאיר שתי אפשרויות:
א. $n = 1 \quad ; \quad m - n = 0$. לכן $m = n = 1$. ואז $m^4 + 4n^4 = 5$.
ב. $n = 0 \quad ; \quad m - n = \pm 1$, ואז $m^4 + 4n^4 = 1$, וזה לא מספר ראשוני.

4. הוכח כי $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2007 \cdot 2009 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2008 \cdot 2010$ מתחלק ב-2011.

אנחנו יכולים לנסח את הפתרון באופן אלמנטארי, או באמצעות חשבון שאריות. כמובן שחשבון שאריות יותר קצר, (וזה סיבה טובה ללמוד לעשות את זה אם אתם עוד לא יודעים). הנה שני הפתרונות על מנת שתוכלו להשוות:

פתרון ראשון.

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 2007\cdot 2009+2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot 2008\cdot 2010=$$
$$=1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 2007\cdot 2009+(2011-2009)\cdot(2011-2007)\cdot\ldots\cdot(2011-1)$$

לאחר פתיחת סוגריים, יהיו הרבה מחוברי שבהם 2011 הוא אחד הגורמים,לכן הביטוי שווה:

$$2011k+1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 2007\cdot 2009+(-2009)\cdot(-2007)\cdot\ldots\cdot(-3)\cdot(-1)$$

לכן במכפלה של המחובר האחרון יש $\frac{2010}{2}=1005$ סימני מינוס, וזה מספר אי-זוגי, לכן מתקבל

$$2011k+1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 2007\cdot 2009-2009\cdot 2007\cdot\ldots\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1=2011k$$

זה מתחלק ב-2011, מש"ל.

פתרון שני. היות ו-

$$2=-2009\,(\mathrm{mod}\,2011)$$
$$4=-2007\,(\mathrm{mod}\,2011)$$
$$\ldots$$

מקבלים

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 2007\cdot 2009+2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot 2008\cdot 2010=$$
$$=1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 2007\cdot 2009+(-2009)\cdot(-2007)\cdot\ldots\cdot(-5)\cdot(-3)\cdot(-1)\quad(\mathrm{mod}\,2011)$$

במחובר השני יש $\frac{2010}{2}=1005$ סימני מינוס (וזה מספר אי-זוגי), לכן המחוברים מצטמצמים, ומקבלים 0 מודולו 2011.

5. הוכח כי המספר $5765^{5765}+5766$

א. אינו ראשוני

ב. מכפלה של 3 מספרים שגדולים מ-1.

פתרון. א. נסתכל על הדבר הזה מודולו 7.

$$5765 = 5600 + 140 + 21 + 4 = 4 \ (\mathrm{mod}\ 7)$$
$$4^2 = 16 = 2 \ (\mathrm{mod}\ 7)$$
$$4^3 = 4\cdot 2 = 1 \ (\mathrm{mod}\ 7)$$

לכן

$$5765^{3k+2} = (4^3)^k\cdot 4^2 = 2 \ (\mathrm{mod}\ 7)$$
$$5765^{5765} + 5766 = 2 + 5 = 0 \ (\mathrm{mod}\ 7)$$

כלומר המספר מתחלק ב-7.

ב. הפולינום $x^{3k+2} + x + 1$ מתחלק בפולינום $x^2 + x + 1$. אפשר לראות את זה בשתי דרכים: או באמצעות שורשים (שורשים של הפולינום השני הם גם בשורשים של פולינום הראשון) או ישירות:

$$x^{3k+2}+x+1 = x^{3k+2}+x^{3k+1}+x^{3k}+\ldots+x^2+x+1-\left(x^{3k-1}+\ldots+x^3+x^2+x+1\right)x^2 =$$

$$=\left(x^2+x+1\right)\left(\left(x^{3k}+x^{3(k-1)}+\ldots+x^3+1\right)-\left(x^{3(k-1)}+\ldots+x^3+1\right)x^2\right)$$

לכן $5765^{5765} + 5765 + 1$ מתחלק ב- $5765^2 + 5765 + 1$.

אבל $5765^2 + 5765 + 1$ מתחלק ב-7 (בדומה לסעיף א'). לכן מקבלים:

$$5765^{5765}+5766 \;=\; \frac{5765^{5765}+5766}{5765^2+5766} \times \frac{5765^2+5766}{7} \times 7$$

כאשר כל אחד מהגורמים - שלם.