תרגיל 4

1. קוביית גבינה $3\times3\times3$ מורכבת מ-27 קוביות קטנות $1\times1\times1$. עכבר אוכל את הקובייה הגדולה, כאשר בכל דקה הוא אוכל קובייה קטנה אחת. בכל פעם הוא אוכל קובייה שהייתה לה פאה משותפת עם הקובייה הקודמת שנאכלה. ב-27 דקות הוא מסיים את הקובייה הגדולה.
האם יתכן שהוא מתחיל לאכול מהקוביה הפינתית, ומסיים בקובייה המרכזית?

פתרון. נצבע את כל הקוביות הקטנות בשני צבעים באמצעות "צביית שחמט": קובייה פינתית תהיה שחורה, וכל שתי קוביות צמודות תהיינה בצבעים הפוכים. אז בעצם כל הקוביות הפינתיות תהיינה שחורות, וקוביה מרכזית תהיה לבנה. סה"כ יש יותר קוביות שחורות מאשר לבנות (14 ו-13), וכל פעם אנחנו מחליפים צבע של קובייה, לכן בסוף של סדרה (שחורה – לבנה – שחורה – לבנה - ...) תהיה קובייה שחורה. וזאת לא יכולה להיות קובייה מרכזית.

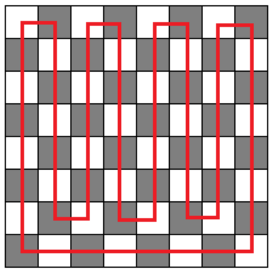
2. מלך שחמט, כידוע, יכול לזוז למרחק של משבצת אחת במאונך, במאוזן או באלכסון. יוסי הצליח להעביר את המלך על כל משבצת של לוח שח רגיל (8×8) פעם אחד בדיוק ולהחזיר אותו בסוף למשבצת שממנה הוא התחיל. האם יתכן שמספר המהלכים האלכסוניים שהוא ביצע שווה ל-17?

פתרון. סה"כ מלך יעשה מספר זוגי של מהלכים (64). בכל מהלך אופקי או אנכי הוא מחליף צבע של משבצת (משחור ללבן או מלבן לשחור). בכל מהחל אלכסוני הוא שומר על הצבע של משבצת.
הוא יחליף צבע מספר זוגי של פעמים, לכן גם כמות המהלכים שבהם הוא ישמור על הצבע הוא זוגי. ולכן זה לא יכול להיות 17.

3. א. מלוח שח רגיל (8×8) הורידו שתי משבצות פינתיות מנוגדות. האם אפשר לחלק את שארית הלוח למלבנים שמורכבים משתי משבצות (דומינו)?
ב. מה היה קורה אם היינו מורידים שתי משבצות אחרות? לאיזה זוג משבצות היה אפשר לחלק את הלוח למלבנים כאלה, ולאיזה לא?

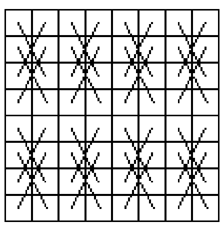
פתרון. א. לפי צביית שח, כל דומינו מכסה משבצת שחורה ומשבצת לבנה. בלוח יש אותה כמות של משבצות שחורות ולבנות, לכן כל כמות של דומינו ישאירו אותה כמות של משבצות שחורות ולבנות לא מכוסות. לכן לא יתכן שהמשבצות במכוסות הן שתי המשבצות הפינתיות הנגדיות, כי הן באותו צבע.

ב. מהסיבה שכבר הסברנו, אי-אפשר לעשות זאת אם המשבצות שהורידו הן באותו צבע. השאלה שנשאלת היא האם אפשר תמיד לפתור את השאלה כאשר המשבצות בצבעים שונים. התשובה היא כן.



לזה יש מספר הוכחות, אנחנו נראה הוכחה קצרה ויפה. נצייר מסלול על לוח שח שעובר על כל המשבצות (כל פעם משבצת מסוימת למשבצת שלידה) וחוזר למשבצת המקורית. כל שני משבצות בצבעים שונים יחלקו את המסלול הזה למסלולים בעלי אורך זוגי, לכן הם מתחלקים לזוגות של משבצות באופן טבעי (לפי סדר המסלול).

4. נתון לוח שח רגיל (8×8) ללא כלים עליו. השחקן הראשון מניח על אחת מהמשבצות שלו פרש שחמט, ואחרי זה, בתורות (השחקן השני מתחיל) הם מזיזים אותו בצעדי פרש חוקיים. שחקן מפסיד אם הוא מעביר את הפרש למשבצת שהפרש כבר היה בה קודם. לאיזה שחקן יש אסטרטגיה מנצחת, לראשון או לשני?



תשובה: לשחקן השני.

פתרון. השחקן השני יחלק את משבצות הלוח (מחשבתית) לזוגות, כך שכל שני משבצות באותו זוג מקושרות ע"י מהלך של פרש (יש הרבה דרכים לעשות את זה, למשל כמו בציור). כל פעם שהראשון מציב פרש במשבצת מסוימת, השני מעביר פרש למשבצת השנייה של אותו זוג. כך, בכל רגע אחרי מהלך של שני (ברור באינדוקציה) פרש ביקר בחלק מהזוגות בשתי המשבצות ובאף משבצת של זוגות אחרים. לכן הראשון נאלץ להעביר פרש למשבצת שהוא לא היה לא בה ולא בבת הזוג שלה, ולכן השני יכול להמשיך באסטרטגיה שלו כל עוד שהראשון הצליח לעשות מהלך. לכן הראשון הוא זה שלא יהיה מסוגל לעשות מהלך ברגע מסוים.

5.** הוכח שמתוך 50 אנשים תמיד יש שניים שיש להם מספר זוגי (אולי 0) של חברים משותפים מתוך 48 אנשים האחרים.

פתרון. נניח שאין שני אנשים שיש להם מספר זוגי של חברים משותפים.

טענה. אם אין שני אנשים שיש להם מספר זוגי של חברים משותפים אז לכל אחד יש מספר זוגי של חברים.
הוכחת הטענה. נניח שלמישהו, למשל ליוסי, יש מספר אי-זוגי של חברים. נקרא להם אנשים טובים (בשביל להבדיל אותם משאר האנשים). אז לכל איש טוב יש כמות אי-זוגית של חברים טובים (אחרת ליוסי ואותו האיש יש מספר

זוגי של חברים משותפים), ויש מספר אי-זוגי של אנשים טובים. נבקש לרשום מכל איש טוב את רשימת החברים שלו, שהם אנשים טובים. נקבל מספר אי-זוגי של רשימות באורך אי-זוגי, כלומר סה"כ מספר אי-זוגי של שורות. אבל בעצם ברשימה הזאת כל קשר בין שני אנשים טובים מופיע פעמיים, לכן זה חייב להיות מספר זוגי. סתירה.

מכאן אפשר להמשיך בשני דרכים: בדרך אלמנטארית ודרך לא אלמנטארית:

פתרון ראשון (אלמנטארי). ניקח איש כלשהו, נגיד את יוסי. בין 49 אנשים אחרים יש לא מספר זוגי של אנשים שהם חברים שלו שנקרא להם אנשים טובים ומספר אי-זוגי של אנשים שהם לא חברים שלו, שנקרא להם אנשים רעים.
לפי ההנחה, כל איש טוב מקיר מספר אי-זוגי של אנשים טובים וגם את יוסי, לכן לפי הטענה הוא חייב להכיר מספר זוגי של אנשים טובים.
לכן כמות הקשרים של חברות בין אנשים טובים לרעים – מספר זוגי.
אבל יש מספר אי-זוגי של אנשים רעים, וכל אחד מכיר מספר אי-זוגי של אנשי טובים (לפי ההנחה).
לכן כמות הקשרים של חברות בין אנשים טובים לרעים – מספר אי-זוגי. סתירה.

פתרון שני (לא אלמטארי). לכל קבוצה של אנשים, אחרי שנמספר אותם, אפשר לבנות מטריצה A מעל $\mathbf{Z}_2$ (שדה של שני איברים) : בשורה i, עמודה j נרשום 0 אם אנשים i , j לא חברים ונרשום 1 אם הם כן חברים.
יהיה v ווקטור באורך 50 מעל $\mathbf{Z}_2$ שכל הקואורדינטות שלו שוות 1.
אז, לפי הטענה שהוכחנו, $Av = 0$.
קל להבין, שגם למטריצה A^2 יש משמעות : בשורה i, עמודה j רשום 0 אם ורק אם לאנשים i , j לאיש מספר זוגי של חברים משותפים, ובתוך משבצת מספר i של האלכסון הראשי רשום 0 אם ורק אם יש לו מספר זוגי של חברים.
אז, לפי הטענה באלכסון רשומים אפסים ולפי הנחה מחוץ לאלכסון רשומים אחדים. לכן אנחנו יודעים את A^2 ומכאן אנחנו יודעים ש $A^2v = v \neq 0$.
אבל ראינו ש- $Av = 0$ ולכן $A^2v = 0$. סתירה.