תרגיל 3 – אי-שוויונים

בשביל להבין "איך הגיעו לפיתרון" של אי-שוויון לפעמים כדאי לקרוא אותו מהסוף להתחלה.

1. הוכח כי לכל a,b,c ממשיים $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$.

פתרון. $a^2-2ab+b^2=\left(a-b\right)^2 \ge 0$

לכן $a^2+b^2 \ge 2ab$

באופן דומה: $b^2+c^2 \ge 2bc$

וגם $a^2+c^2 \ge 2ac$

נחבר את שלוש האי-שוויונים האחרונים ונקבל $2\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 2\left(ab+bc+ca\right)$.

נשאר לחלק ב-2.

2. הוכח כי לכל a,b,c,d ממשיים $a^2+b^2+c^2+d^2+1 \ge a+b+c+d$.

פתרון. $a^2-a+\frac{1}{4}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \ge 0$

לכן $a^2+\frac{1}{4} \ge a$

נרשום אי-שוויון האחרון עבור a גם עבור b,c,d ונחבר את ארבעתם.

3. הוכח כי לכל a,b,c ממשיים $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge a+b+c$.

פתרון. זה לא נכון לכל המספרים ממשיים, כי אם נחליף סימן של a,b,c בו זמנית אז אי-שוויון יחליף סימן (וקל לראות שלא תמיד מתקיים שוויון).
אבל אפשר להוכיח את זה לכל מספרים חיוביים.

$$a^2-2ab+b^2=\left(a-b\right)^2 \ge 0$$

$$a^2 \ge 2ab-b^2$$

ולכן

$$\frac{a^2}{b} \ge 2a-b$$

באופן דומה $\frac{c^2}{a} \ge 2c-a$, $\frac{b^2}{c} \ge 2b-c$. לפיכך

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge \left(2a-b\right)+\left(2b-c\right)+\left(2c-a\right)=a+b+c$$

4*. עבור כל a,b,c ממשיים (אבל לאו דווקא חיוביים) כאלה ש-$a+b+c \ge 0$,
הוכח כי $a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$.

פתרון. הוכחנו בשאלה 1 כי $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0$.
נכפיל את זה ב-$a+b+c$ שהוא מספר אי-שלילי.

$$\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\left(a+b+c\right)\ge 0$$

קל לבדוק שבפתיחת סוגריים (אתם קוראים את זה עם עט ונייר, נכון?) כל הביטויים מהסוג a^2b יצטמצמו ומה שיישאר זה

$$a^3+b^3+c^3-3abc\ge 0$$

מש"ל.

5.** נתונים מספרים ממשיים a,b,c כאלה ש-$a\left(b-c\right)^2+b\left(a-c\right)^2+c\left(a-b\right)^2\ge 0$.
הוכח כי $a\left(b-c\right)^4+b\left(a-c\right)^4+c\left(a-b\right)^4\ge 0$.

פתרון. צריך להכפיל את האי-שוויון הנתון באי-שוויון של שאלה 1:

$$\left(\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\right)\cdot\left(a\left(b-c\right)^2+b\left(a-c\right)^2+c\left(a-b\right)^2\right)\ge 0$$

עם נפתח סוגריים, נקבל מש"ל.
אנחנו נבצע פתיחת סוגריים באמצעות "טכנולוגיה" של הסכום הציקלי (או מעגלי) $\sum_{cyc}$
פירוש הדבר שמסכמים על כל שלוש הביטויים שדומים לביטוי שרשום: א'- הביטוי עצמו, ב'- הביטוי שמתקבל כאשר מחליפים את a ב-b, את b ב-c, ואת c ב-a, ג'- הביטוי שמתקבל כשעושים החלפה כזאת פעמיים. הרישום מקצר מאוד את הרישום: למשל שאלה ראשונה היה אפשר לרשום בתור $\sum_{cyc}a^2\ge\sum_{cyc}ab$, ואת השלישית בתור $\sum_{cyc}\frac{a^2}{b}\ge\sum_{cyc}a$.
כמובן, שבנוסחאות ארוכות זה חוסך הרבה יותר.

ובכן, את בפתיחת הסוגריים שהצענו לעשות יתקבל:

$$\sum_{cyc}a\left(b-c\right)^4+\sum_{cyc}a\left(b-c\right)^2\left[\left(a-b\right)^2+\left(a-c\right)^2\right]=$$

$$=\sum_{cyc}a\left(b-c\right)^4+\sum_{cyc}a\left(b-c\right)^2\left[2a^2+b^2+c^2-2ab-2ac\right]=$$

$$=\sum_{cyc}a\left(b-c\right)^4+\sum_{cyc}a\left(b-c\right)^2\left[\left(b-c\right)^2+2a^2-2ab-2ac+2bc\right]=$$

$$=\sum_{cyc}a\left(b-c\right)^4+\sum_{cyc}a\left(b-c\right)^4+2\sum_{cyc}a\left(b-c\right)^2\left[a^2-ab-ac+bc\right]=$$

$$=2\sum_{cyc}a\left(b-c\right)^4+2\sum_{cyc}a\left(b-c\right)^2\left(a-b\right)\left(a-c\right)=$$

$$=2\sum_{cyc}a\left(b-c\right)^4+2\left(b-c\right)\left(a-b\right)\left(c-a\right)\left[a\left(c-b\right)+b\left(a-c\right)+c\left(b-a\right)\right]=$$

$$=2\sum_{cyc}a\left(b-c\right)^4+2\left(b-c\right)\left(a-b\right)\left(c-a\right)\left[ac-ba+ba-bc+bc-ac\right]=$$

$$=2\sum_{cyc}a\left(b-c\right)^4$$