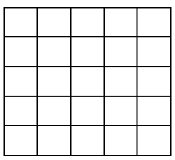
# תרגיל 2 – שיקופים

***רעיון כללי שפותר הרבה שאלות לגבי ביליארדים: במקום שהשולחן ביליארד (היקום) יעמוד כמו שהוא עמד, והכדור יוחזר מהקיר, אפשר לדבר על תיאור אחר של אותו מצב: רק הכדור ממשיך בקו ישר ושולחן ביליארד (והיקום) משוקף יחסית לאותו קיר. אותו דבר לגבי קרני אור.***

**1.** נתון שולחן ביליארד בצורה של מלבן 7 על 9, שיש לו כיסים בקודקודים. מהפינה שולחים כדור לאורך חוצה הזווית של המלבן. מה המרחק שיעבור הכדור עד שיכנס לכיס? כמה פעמים הכדור יפגע בקירות של השולחן?



תשובה. 14.

**פתרון.** השאלה שקולה לשאלה כזאת: נניח שהמישור מרוצף על ידי מלבנים זהים בעלי גובה 7 ורוחב 9 (ריצוף כמו בציור, אבל אינסופי לכל כיוון) . שולחים כדור מפינה של מלבן מסוים בזווית של $45^o$. כמה גבולות של מלבנים הוא יחצה עד שהוא יגיע לפינה של מלבן אחר?

(שקילות של הבעיה הזאת לבעיה המקורית מתקבלת במהירות מהרעיון הכללי שהוזכר בתחילת הקובץ.)

קל לראות (למה בעצם?) שהכדור יגיע לפינה בפעם הראשונה כאשר הוא יעבור 9 מלבנים בגובה ו-7 מלבנים ברוחב, כלומר הוא יחצה 8 קווים אופקיים ו-6 קווים אנכיים. מש"ל.

**2.** שתי מראות מישוריות אינסופיות יוצרות זווית בגודל $\alpha$. קרן אור מתקדמת במקביל למראה ראשונה ופוגעת במראה שנייה. כמה פעמים הקרן תפגע בשתי המראות בסה"כ?

**תשובה.** המספר השלם המרבי שקטן מ- $\frac{180^\circ}{\alpha}$

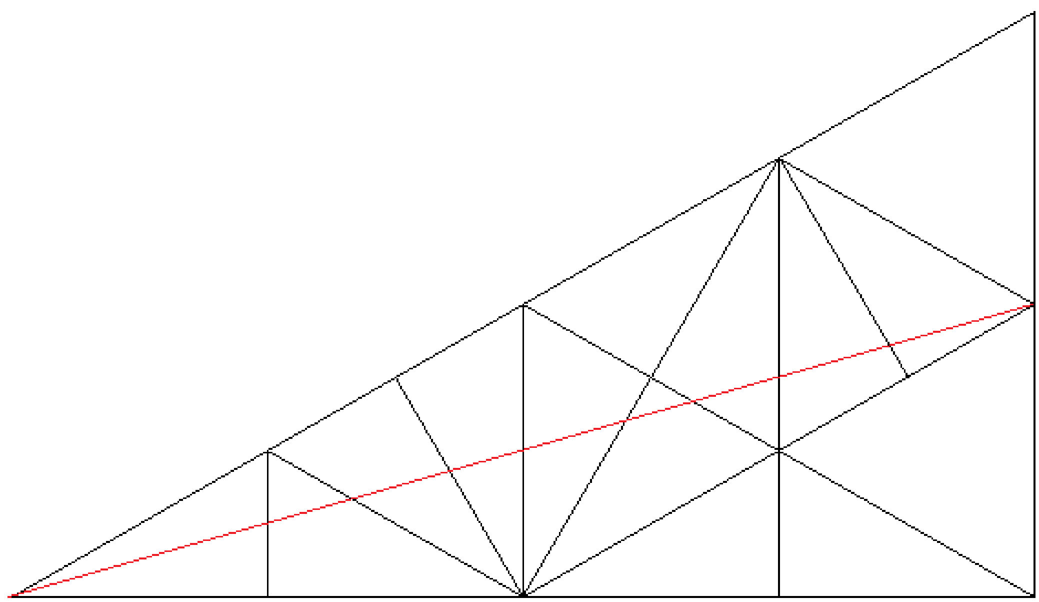
**פתרון.** כמו בשאלה הקודמת, במקום לשנות את כיוון הקרן, אפשר כל פעם לשקף את היקום לגבי המראה שבה הקרן פוגעת. בניסוח השקול הזה, יש לנו משפחה של מראות (זה נראה כמו ספר פתוח) שבין כל שני מראות צמודות יז זוויות בגודל $\alpha$. הקרן פוגעת במראות וממשיכה ישר דרכן. היא תפגע בסה"כ במראות שנמצאות בטווח של 180 מעלות, ומספרם יהיה המספר השלם המרבי שקטן מ- $\frac{180^\circ}{\alpha}$.

**הערה.** אפשר להבין את השאלה בתור שאלה מישורית (כאשר המראות הן ישרים במישור), או בתור שאלה מרחבית (כאשר המראות הן מישורים במרחב) אבל זה לגמרי לא משנה.

**3.** נתון שולחן ביליארד בצורה של משולש שזוויותיו $30°$, $60°$, $90°$ ויש לו כיסים בקודקודים. מהזווית של 30 שולחים כדור לאורך התיכון של המשולש. כמה פעמים יתנגש הכדור בכירות עד שהוא יכנס לאיזשהו כיס?

תשובה. 8 פעמים.

**פתרון.** כמו קודם, במקום לשבור את המסלול של הכדור, ניתן לו להמשיך בקו ישר ונשקף את השולחן. הרעיון יכול להישמע קצת מפחיד, כי עכשיו השולחן לא מלבני, אבל משני שולחנות הפוכים כאלה שצמודים לאורך הניצב הארוך אפשר להרכיב משולש משוכלל, והרי משולש משוכלל אכן מרצף את המישור. הקורה מוזמן להבין את יתר הפרטים של הפתרון מהתמונה:

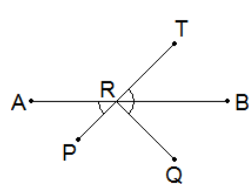


**4.** משולש ABC – ישר זווית, זווית A ישרה. בוחרים נקודות K, M, N על הצלעות AB, BC, CA כך ש-AKMN מקבילית. איפה צריכה להיות נקודה M כדי שהקטע NK יהיה קצר ביותר?

תשובה. AM צריך להיות גובה.

**פתרון.** אכן, זווית A ישרה, לכן AKMN מלבן, לכן NK מינימלי כאשר AM מינימלי.

**5*.** נתון משולש חד זוויות ABC. נתבונן בשלשות של נקודות P, Q, R שנמצאות על BC, AC, AB בהתאמה. הוכח ש-$PQ + QR + RP$ יהיה מינימלי כאשר AP, BQ, CR הם גבהי המשולש.

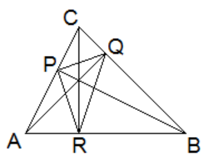



**פתרון.** נפתור את השאלה בשלבים. נתחיל משאלה פשוטה: נניח כי נתון ישר AB, וזוג נקודות P, Q. כיצד למצוא נקודה R על AB כך ש- $PQ + QR$ יהיה מינימלי.

אם P, Q נמצאים בצדדים שונים של R, אז קל לראות צריך לקחת

נקודת חיתוך של PQ ו-AB (מאי-שוויון המשולש). אם P ו-Q באותו צד של הישר, אז פותרים את השאלה כך: מחליפים נקודה Q בנקודה R, שהיא סימטרית ל-Q יחסית ל-AB, ועוברים לשאלה שקולה – למצוא נקודה R כך ש- PR + RT יהיה מינימלי. כמובן, מכאן רואים, שלנקודה R תהיה תכונה שמזכירה את התכונה של קרן אור או כדור ביליארד: זוויות ש-PR, QR יוצרות עם הישר AB תהיינה שוות.

מכאן המסקנה: אם PQR הוא משולש בעל היקף מינימלי שחסום במשולש ABC, אז בכל אחד מהנקודות P, Q, R שני צלעות של המשולש PQR יוצרות זוויות שוות עם הישר ABC. נבדוק, שכאשר AP, BQ, CR הם גבהים התכונה הזאת אכן מתקיימת.



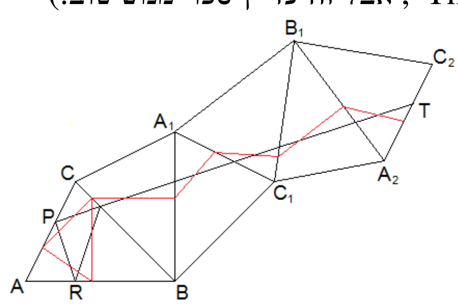

אכן, נניח כי H נקודת חיתוך הגבהים. מעגל שקוטרו AH מכיל גם נקודות P, R לכן הזוויות ARP, AHP שוות. ברור שהזוויות AHP, BHQ שוות. מעגל שקוטרו HB מכיל נקודות R, Q לכן זוויות BHQ, BRQ שוות. ובכן יש שוויון בין הזוויות

$$ARP = AHP = BHQ = BRQ$$

באופן דומה מוכיחים כי PQC = RQB, וגם APR = CPQ. ובכן, באמת כדור ביליארד יכול לעבור במסלול סגור במשולש שנוצר על ידי עקבי הגבהים, וזה

אבל זה עדיין לא פותר את השאלה. הרי יכול להיות שיש עוד משולשים PQR שמקיימים את התכונה, ויכול להיות שבכלל אין משולש מינימלי.

הוכחה יפה הוצעה על ידי H. A. Schwarz (זו אחת משתי הוכחות שמופיעות בספר "Von Zahlen und Figuren" של Rademacher ו-Toeplitz. בתרגום האנגלי הספר קיבל שם קצת ילדותי: "The enjoyment of Math", אבל זה עדיין ספר ממש טוב.)




ובכן, נבצע 5 שיקופים: בהתחלה נשקף את התמונה יחסית ל-BC (אז A יעבור ל-$A_1$), אחרי זה יחסית ל-$BA_1$ (ואז C יעבור ל-$C_1$), אחרי זה נשקף יחסית ל-$C_1A_1$ (ואז B יעבור ל-$B_1$), אחרי זה נשקף יחסית ל-$C_1B_1$ (ואז $A_1$ יעבור ל-$A_2$), ובסוף זה נשקף יחסית ל-$B_1A_1$ ואז $C_1$ יעבור ל-$C_2$.

אם P, Q, R היו עקבי הגבהים אז הקטע PQ, שיקוף ראשון של קטע QR, קטע RP אחרי שני שיקופים, קטע PQ אחרי שלושה שיקופים, קטע QR אחרי ארבעה שיקופים, וקטע RP אחרי 5 שיקופים וצרים קטע ישר אחד.

בכל מקרה, אפילו אם P, Q, R אינם עקבי הגבהים אלה סתם נקודות על הצלעות המתאימות, שישה קטעים אלה יוצרים קו שבור, שאורכו שווה פעמיים ההיקף של PQR. נסמן ב-T את המיקום של P אחרי כל 5 השיקופים. אז קל לבדוק שהקטעים $CC_2$, $AA_2$, PT שווים ומקבילם (תרגיל לקוראים), לכן בכל מקרה פעמיים היקף המשולש גדול או שווה לאורך של $AA_2$, ובמקרה שבו P, Q, R הם עקבי הגבהים מתקיים שוויון. מש"ל.