תרגיל 23

גאומטריה קומבינטורית

1. א. כל נקודה במישור צבועה באחד משלושה צבעים. הוכח כי קיימות שתי נקודות באותו צבע שהמרחק בינם שווה 1.

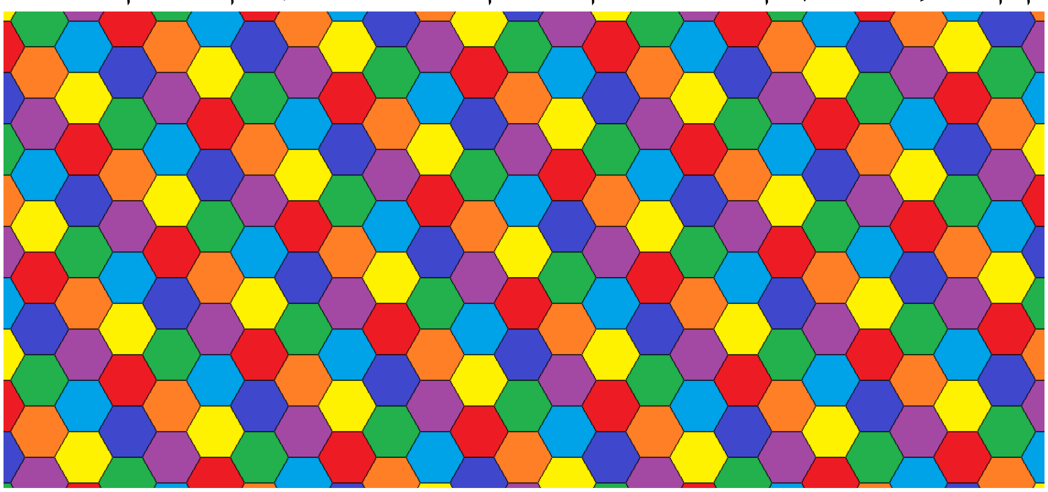
ב. הוכח שאם מישור צבוע ב-7 צבעים, אז יתכן שאין שתי נקודות באותו צבע שהמרחק בינם שווה 1.

ג. הוכח שאם מישור צבוע ב-4 צבעים, אז קיימות שתי נקודות באותו צבע שהמרחק בינם גדול מ-0.99 אבל קטן מ-1.

פתרון. א. נניח שאין נקודות שהמרחק בינם 1 והן באותו צבע. אז בכל משולש שווה צלעות עם צלע 1 הקודקודים מיצגים את כל 3 הצבעים שיש. נתבונן בזוג משולשים ABC , BCD בעלי צלע משותפת BC, שכל צלעותיהם 1. אז יוצא שנקודות A ו-D באותו צבע, וזה נכון לכל שתי נקודות שנמצאות במרחק $\sqrt{3}$.

ניקח נקודה כלשהי .

ב. להלן צביעה של מישור ב-7 צבעים. האלכסון הגדול של כל משושה קצת יותר קטן מ-1 (נגיד 0.99). קל לראות שאין שתי נקודות באותו צבע שהן במרחק של 1.



ג. ניקח שתי נקודות A, B במרחק 0.999. אפשר להניח שהם בצבעים שונים – אחרת כבר מצאנו את שתי הנקודות. נחלק את קטע AB ל-1000000 קטעים שווים על ידי נקודות. אז יש שתי נקודות צמודות K, M בסדרה זאת שהם בצבעם שונים, ומרחק בינם קטן מ-0.00001. ניקח מעגל ω שרדיוסו 0.999 ומרכזו K. כל הנקודות במעגל חייבות להיות בצבע שונה מ-K ומ-M, לכן ω צבוע בשני הצבעים האחרים. ניקח שתי נקודות על ω במרחק 0.999. עם הן באותו צבע, אז ניצחנו. אם לא, נחלק את הקשת של ω שמחברת אותן ל-1000000 קשתות שוות על ידי נקודות. אז יהיו שתי נקודות צמודות בצבעים שונים. ובכן, על מעגל ω יש נקודות P, Q במרחק של פחות מ-0.00001 בצבעים שונים. ניקח נקודה Z שהיא גם על ω במרחק 0.999 מ-P. אז מרחקים מ-Z לנקודות K, M, P, Q כולם בין 0.99 ל-1 ונקודות אלה מייצגות את כל 4 הצבעים, לכן יש קטע באורך כזה שאחד הקצוות שלו Z וגם הקצה השני באותו צבע.

2. א. נתונה משפחה של קטעים בישר, כזאת לכל שני קטעים יש נקודה משותפת. הוכח כי קיימת נקודה שהיא משותפת לכל הקטעים.

ב.* נתונה משפחה של קבוצות קמורות במישור, שמקיימת: לכל 3 קבוצות במשפחה, יש נקודה משותפת לשלושתן. הוכח שיש נקודה משותפת לכל הקבוצות במשפחה.

ג. הכלל את הסעיפים הקודמים למקרה N-מימדי.

הערה. טענה זאת נקראת משפט Helly.

א. תהיה P הנקודה הימנית ביותר מבין קצוות שמאליים של הקטעים, ו-Q הנקודה השמאלית ביותר מבין קצוות הימניים של הקטעים. אם P נמצא מימין ל-Q אז הקטע של Pוהקטע של Q לא נחתכים, לכן זה לא יכול להיות.

ניקח נקודה כלשהי R בין P ל-Q. קצה ימני של כל קטע (אפילו Q) נמצא מימין ל-R, וקצה שמאלי של כל קטע (אפילו P) נמצא משמאל ל-R, לכן R נמצאת על כל הקטעים.

ב. ניקח 4 קבוצות: X, Y, Z, T. לכל 3 קבוצות יש נקודה משותפת, וזה נותן לנו 4 נקודות במישור: A, B, C, D. ל-4 נקודות במישור יש שני מצבים קומבינטוריים: או נקודה אחת בקמור של 3 נקודות אחרות, או מרובע קמור. נבדוק את שני המקרים:

במקרה של נקודה בקמור של 3 נקודות: בלי הגבלת הכלליות D שהיא נקודת חיתוך של X, Y, Z נמצאת בקמור של A, B, C שהן נקודות חיתוך של T אם הקבוצות האחרות. T קמורה, לכן כל המשולש ABC מוכל ב-T, לכן גם D מוכל ב-T. לכן T שייך לכל 4 הקבוצות.

במקרה שיש מרובע קמור: בלי הגבלת הכלליות המרובע הוא ABCD, כאשר A ו-C שייכות לקבוצות Y, T, ונקודות B, D שייכות ל-X, Z. תהיה E נקודת חיתוך האלכסונים במרובע. אס קבוצות קמורות Z , X מכילות את כל האלכסון BD לכן גם את E וקבוצות קמורות Y , T מכילות את האלכסון AC לכן גם את E ולכן כל 4 הקבוצות מכילות את E.

לכן בכל מקרה, הוכחנו את המשפט עבור משפחה של 4 קבוצות קמורות. נוכיח אותו ל-n קבוצות באינדוקציה. בסיס האינדוקציה הוא 4. מעבר: נניח שיש $n+1$ קבוצות $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$ שמקיימות את התנאי: לכל 3 יש נקודה משותפת. אז לפי מה שהוכחנו, אפילו לכל 4 יש נקודה משותפת. אז אם נתבונן במשפחה של קבוצות חיתוך עם הקבוצה האחרונה $X_1 \cap X_{n+1}, X_2 \cap X_{n+1}, \dots, X_n \cap X_{n+1}$. במשפחה זאת יש n קבוצות ויש נקודה משותפת לכל 3, לכן גם לפי הנחת האינדוקציה יש נקודה משותפת לכולם. מש"ל.

ג. האינדוקציה היא בדיוק כמו בסעיף ב', אבל צריך לעשות את הצעד הראשון: אם יש $n+2$ קבוצות קמורות ב-$\mathbb{R}^n$ שלכל $n+1$ מהם יש נקודה משותפת, אז לכולם יש נקודה משותפת. נתבונן ב-$n+2$ נקודות חיתוך: נקודה A_k שייכת לכל הקבוצות X_j חוץ מ-X_k לכל $k \leq n+2$. אנחנו הולכים להוכיח שאפשר לחלק את $n+2$ הנקודות האלה לשתי מחלקות, כך שנקודה B מסוימת נמצאת גם בקמור של מחלקה ראשונה וגם בקמור של מחלקה שנייה. אז הקבוצות שהאינדקסים שלהם במחלקה השנייה מכילות את הקמור של כל הנקודות במחלקה ראשונה וגם את B, ומסיבה דומה גם קבוצות שהאידנקסים שלהם במחלקה ראשונה מכילות את B, ואז B שייכת בו-זמנית לכל $n+2$ הקבוצות. ובכן, נשאר להוכיח טענה:

טענה. ב-$\mathbb{R}^n$ כל קבוצה של n נקודות ניתן לחלק לשתי מחלקות כאלה שהקמור של מחלקה ראשונה נחתך אם הקמור של המחלקה השנייה.

הוכחה. נבנה $n+1$ וקטורים: $v_k = A_k - A_{n+2}$ לכל $1 \leq k \leq n+1$. בגלל שיש כאן n ווקטורים ב-$\mathbb{R}^n$ אז הם תלויים לינארית, כלומר קיים ביטוי עם מקדמים שלא כולם מתאפסים מהצורה: $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k v_k = 0$. אפשר לרשום את הביטוי גם בצורה $\sum_{k=1}^{n+2} \beta_k A_k = 0$ כאשר $\alpha_k = \beta_k$ עבור $k \leq n+1$, והמקדם האחרון נבחר כך שסכום המקדמים יהיה 0, וגם כאן יש מקדמים שלא מתאפסים. נעביר את האיברים עם המקדמים שליליים לאגף הימני: $\sum \beta_k A_k = \sum \gamma_j A_j$, כאן כבר כל המקדמים חיוביים, לא כולם אפסים, סכום המקדמים בכל אגף אותו דבר, וסכום באגפים שוני הולך על מחלקות זרות של אינדקסים. אפשר לחלק את שני האגפים בקבוע כך שסכום המקדמים בכל אגף יהיה אותו דבר. נקבל שנקודה בקמור של מחלקה ראשונה של נקודת מתלכדת עם נקודה בקמור של מחלקה אחרת של נקודות שזרה לה (הרי קומבינציה לינארית של נקודות עם מקדמים אי-שליליים שסכומם 1 זאת נקודה בקמור של הנקודות).

3. במישור סימנו 5771 נקודות, כך שכל שלוש נקודות מתוכן אפשר לכסות על ידי עיגול שרדיוסו 1. הוכח כי אפשר לכסות את כל הנקודות על ידי עיגול שרדיוסו 1.

פתרון. לכל נקודה ניצור את "העיגול שלה": עיגול שמרכזו בנקודה ורדיוסו אחד. עיגול שרדיוסו 1 מכיל נקודות מסוימות, עם העיגולים של הנקודות הללו מכילות את המרכז של העיגול. לכן אפשר לנסח את הטענה באופן שקול: עם נתונים 5771 עיגולים בעלי רדיוס 1, שכל שלושה מהם נחתכים, אז כולם נחתכים.
הטענה נכונה לא רק עבור עיגולים, אלה גם עבור צורות קמורות כלשהן במישור, וזה משפט Helly (שאלה 2ב).

4. נתונה קבוצה סופית S של נקודות במרחב תלת-מימדי. הטלות של S על מישורים yz , xz , xy יסומנו S_x , S_y , S_z בהתאמה. הוכח כי $|S| \le \sqrt{|S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|}$.

הערה. $|X|$ מסמן עוצמה של קבוצה X.

פתרון. נניח שיש בסה"כ n ערכים עבור קואורדינטת x, והם: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. נניח גם שמבין הנקודות שקואורדינאטה ה-x שלהם היא x_k יש a_k ערכים שונים של קואורדינטת y ויש b_k ערכים שונים של z. אז

$$S_z = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$
$$S_y = b_1 + b_2 + \ldots + b_k$$

כמות הנקודות בשכבת שקואורדינטת x שלה היא x_k אינה עולה על $a_k b_k$, מצד שני היא אינה עולה גם על S_x, לכן היא אינה עולה על ממוצע ההנדסי שלהם: $\sqrt{S_x a_k b_k}$. ואז

$$S \le \sqrt{S_x}\left(\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \ldots + \sqrt{a_k b_k}\right) \le \sqrt{S_x} \cdot \sqrt{S_y} \cdot \sqrt{S_z}$$

לפי אי-שוויון קושי-שוורץ. מש"ל.