

## תרגיל 23

גאומטריה קומבינטורית

1. א. כל נקודה במישור צבועה באחד משלושה צבעים. הוכח כי קיימות שתי נקודות באותו צבע שהמרחק בינם שווה 1.  
ב. הוכח שאם מישור צבוע ב-7 צבעים, אז יתכן שאין שתי נקודות באותו צבע שהמרחק בינם שווה 1.  
ג. הוכח שאם מישור צבוע ב-4 צבעים, אז קיימות שתי נקודות באותו צבע שהמרחק בינם גדול מ-0.99 אבל קטן מ-1.

2. א. נתונה משפחה סופית של קטעים בישר, כזאת לכל שני קטעים יש נקודה משותפת. הוכח כי קיימת נקודה שהיא משותפת לכל הקטעים.  
ב. \* נתונה משפחה סופית של קבוצות קמורות במישור, שמקיימת: לכל 3 קבוצות במשפחה, יש נקודה משותפת לשלושתן. הוכח שיש נקודה משותפת לכל הקבוצות במשפחה.  
ג. הכלל את הסעיפים הקודמים למקרה N-מימדי.

3. במישור סימנו 5771 נקודות, כך שכל שלוש נקודות מתוכן אפשר לכסות על ידי עיגול שרדיוסו 1. הוכח כי אפשר לכסות את כל הנקודות על ידי עיגול שרדיוסו 1.

4. נתונה קבוצה סופית  $S$  של נקודות במרחב תלת-מימדי. הטלות של  $S$  על מישורים  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$  יסומנו  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  בהתאמה. הוכח כי  $|S| \leq \sqrt{|S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|}$ .  
הערה.  $|X|$  מסמן עוצמה של קבוצה  $X$ .