תרגיל 22

1. א. שלושה הולכי רגל הולכים במישור בקווים ישרים ובמהירויות קבועות. ברגע ההתחלתי הם לא נמצאים על ישר אחד. הוכח כי יהיו לא יותר משני רגעים כאלה שהאנשים יהיו על ישר אחד.

ב. ארבע חלליות טסות במרחב תלת-מימדי בקווים ישרים ובמהירויות קבועות. ברגע ההתחלתי הם לא נמצאים על מישור אחד. הוכח כי יהיו לא יותר מאשר שלושה רגעים שבהם החלליות יהיו על מישור אחד.

ג.* ארבע הולכי רגל הולכים במישור בקווים ישרים ובמהירויות קבועות. ברגע ההתחלתי הם לא נמצאים על ישר אחד ולא על מעגל אחד. הוכח כי יהיו לא יותר מארבעה רגעים כאלה שהאנשים יהיו על מעגל אחד.

פתרון. א. אפשר לבטא את התנאי לכך שנקודות $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ יהיו על ישר אחד: $x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 = \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

כאשר x_i , y_i הן פונקציות לינאריות של הזמן t יוצא שהביטוי בצד ימין הוא פונקציה ריבועית ב-t. לכן או שהיא מתאפסת באופן קבוע, או שיש לה לכל היותר 2 שורשים. נתון שברגע התחלתי הם לא על ישר אחד, לכן פונקציה לא מתאפסת ברגע זה. לכן יש לא יותר משני רגעים כאלה.

ב. אפשר לבטא את התנאי לכך שנקודות $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix}$ יהיו על ישר אחד:

$\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix} = 0$. כאשר x_i, y_i, z_i פונקציות לינאריות ב-t מקבלים פולינום מדרגה שלישית ב-t. עם הוא לא מתאפס זהותית, אז יש לו לכל היותר 3 שורשים.

ג. נקודות $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}$ יהיו על ישר אחד או מעגל אחד אם ורק אם מתקיים התנאי הבא: $\det\begin{pmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

נשאיר את הטענה הזאת לקוראים בתור תרגיל. אם x_i , y_i פונקציות לינאריות ב-t אז התנאי הוא פולינום מדרגה 4 ב-t ויש לו לכל היותר 4 שורשים.

2. נתונים שלושה מספרים חיוביים: a, b, c. יוסי חישב את הסכום של השורשים החיוביים של משוואות $x^2 = ax + b \ ,\ x^2 = bx + c \ ,\ x^2 = cx + a$. שלומי חישב את סכום השורשים החיוביים של $x^2 = ax + a \ ,\ x^2 = bx + b \ ,\ x^2 = cx + c$. הסכומים יצאו שונים. למי יצא סכום יותר גדול?

פתרון. לכל פולינום $x^2 - kx - m$ עבור k, m חיוביים שורשים שלו הם $\frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4m}}{2}$.
קל לראות שאם הסימן חיובי אז הערך חיובי, ואם הסימן שלילי אז הערך שלילי.
לכן אנחנו צריכים להשוות בין $\frac{c + \sqrt{c^2 + 4a}}{2} + \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2} + \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$ לבין $\frac{c + \sqrt{c^2 + 4c}}{2} + \frac{b + \sqrt{b^2 + 4b}}{2} + \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2}$. זה שקול להשוואה בין המספרים $\sqrt{c^2 + 4a} + \sqrt{b^2 + 4c} + \sqrt{a^2 + 4b}$, $\sqrt{c^2 + 4c} + \sqrt{b^2 + 4b} + \sqrt{a^2 + 4a}$.
למי ששולט באי-שוויון התמורות: שורש זאת פונקציה קעורה ולכן

$$\sqrt{a^2 + 4a} + \sqrt{b^2 + 4b} + \sqrt{c^2 + 4c} < \sqrt{a^2 + 4b} + \sqrt{b^2 + 4c} + \sqrt{c^2 + 4a}$$

ולכן המספר של יוסי יותר גדול.

למי שלא שולט באי-שוויון התמורות: נא לפתח את שתי הטענות הבאות:

טענה 1. אם $0 \le a_1 < a_2$ וגם $0 \le b_1 < b_2$ אז $\sqrt{a_1 + b_1} + \sqrt{a_2 + b_2} < \sqrt{a_1 + b_2} + \sqrt{a_2 + b_1}$

טענה 2. נניח כי סדרות $a_1, a_2, ..., a_n$ ו- $b_1, b_2, ..., b_n$ מסודרים באותה צורה (כלומר המספר הגדול בסדרת $\{a_i\}$ מתאים למספר הגדול בסדרת $\{b_i\}$, השני בגודלו מתאים לשני בגודלו, וכך הלאה). אז לכל תמורה σ מתקבל אי-שוויון:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i + b_i} \le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i + b_{\sigma(i)}}\ .$$

אם בכל סדרה כל האיברים שונים בזוגות, והתמורה היא לא תמורת זהות, אז

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i + b_i} < \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i + b_{\sigma(i)}}\ .$$

3. מצא את כל הפונקציות (ממספרים ממשיים למספרים ממשיים) שמקיימות:
$f\left(x - f\left(y\right)\right) = f\left(x\right) + f\left(f\left(y\right)\right) + x \cdot f\left(y\right) - 1$.

פתרון. נסמן את התמונה של העתקה f על ידי $\operatorname{Im} f$.
ניתן לפרש את התנאי כך: לכל $x \in \mathbb{R},\ z \in \operatorname{Im} f$ מתקיים:

$$f(x-z)=f(x)+f(z)+x\cdot z-1$$

נציב $z=x$ ונקבל $f(0)=2f(z)+z^2-1$ במילים אחרות:

$$f(z)=\frac{f(0)+1-z^2}{2}$$

ועכשיו נחזור לנוסחה המקורית ונניח ש- $x,z\in \operatorname{Im}f$ ונשתמש בנוסחה שקיבלנו

$$f(x-z)=f(x)+f(z)+x\cdot z-1=$$
$$=\frac{f(0)+1-z^2}{2}+\frac{f(0)+1-x^2}{2}+x\cdot z-1=f(0)-\frac{(x-z)^2}{2}$$

כלומר עבור $t\in \operatorname{Im}f-\operatorname{Im}f$ (הפרש מינקובסקי) מתקיים

$$f(t)=f(0)-\frac{t^2}{2}$$

אבל אם נקבע $z\neq 0$ איזשהו (יש כזה כי $f\equiv 0$ אינו פתרון) אז

$$\operatorname{Im}f-\operatorname{Im}f\supseteq\{f(x-z)-f(x)\}=\{f(z)+x\cdot z-1\}=\mathbb{R}$$

ולכן $f(t)=f(0)-\frac{t^2}{2}$ עבור כל $t\in\mathbb{R}$. בפרט עבור $t\in \operatorname{Im}f$ וכך נקבל כי $f(0)=1$.

ולכן הפתרון הוא $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$.

כדאי לבצע בדיקה: $1-\frac{(x-z)^2}{2}=1-\frac{x^2}{2}+1-\frac{z^2}{2}+x\cdot z-1$ כאשר $z=f(y)$ וזה נכון.

4. מצא את כל הפונקציות (ממספרים ממשיים למספרים ממשיים) שמקיימות:
$f(x)+f(y)\geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+|x-y|$.

נראה שאין פונקציות כאלו.

תנאי שקול ל- $f(4x)+f(4y)\geq 2f(2x+2y)+4|x-y|$. נבחר $x,\ y$ כאלו שעבורם $\underline{f(4x)+f(4y)<2f(2x+2y)+8|x-y|}$ (אחרת נחלק את f פי 2 ונקבל פונקציה שעדיין מקיימת את התנאי. אם יש צורך נחלק את f פי 2 מספר פעמים ואז התנאי בטוח יפסיק להתקיים).

לפי התנאי מתקיימים שלוש אי-שוויונים הבאים:

$$f(4x)+f(2x+2y)\geq 2f(3x+y)+2|x-y|$$
$$f(2x+2y)+f(4y)\geq 2f(x+3y)+2|x-y|$$
$$2f(3x+y)+2f(x+3y)\geq 4f(2x+2y)+4|x-y|$$

נרכיב את שלוש האי-שוויונים ונקבל כי

$$f(4x)+2f(2x+2y)+f(4y)\geq 4f(2x+2y)+8|x-y|$$

כלומר $f(4x)+f(4y)\geq 2f(2x+2y)+8|x-y|$ בסתירה.

ולכן אין פונקציה כזו מש"ל.

5. האם קיים פולינום ממשי בשני משתנים, שיש לו inf אבל אין לו מינימום?
כלומר, בלשון פחות מדעי, האם יתכן שקיים a ממשי שמקיים
(א) $p(x, y) > a$ לכל x, y ממשיים,
(ב) אבל אין $b > a$ כזה שעבורו $p(x, y) \geq b$ לכל x, y ממשיים.

תשובה. כן

פתרון. ניקח למשל את הפולינום $(1-xy)^2 + x^2$.
הפולינום הוא סכום של שני פולינומים אי-שליליים. הוא מתאפס רק אם שניהם מתאפסים בו זמנית, כלומר גם $x = 0$ וגם $1 - xy = 0$. אבל אם $x = 0$ אז $1 - xy = 1$, לכן הפולינום אף פעם לא מתאפס. מצד שני אם ניקח מספר x חיובי קטן, ונציב $y = \frac{1}{x}$, ערך של פולינום יהיה x^2. לכן אפשר לקבל מספר חיובי קטן כרצוננו, אבל אי-אפשר לקבל 0 או מספר שלילי.