

תרגיל 22

1. א. שלושה הולכי רגל הולכים במישור בקווים ישרים ובמהירויות קבועות. ברגע ההתחלתי הם לא נמצאים על ישר אחד. הוכח כי יהיו לא יותר משני רגעים כאלה שהאנשים יהיו על ישר אחד.

ב. ארבע חלליות טסות במרחב תלת-מימדי בקווים ישרים ובמהירויות קבועות. ברגע ההתחלתי הם לא נמצאים על מישור אחד. הוכח כי יהיו לא יותר מאשר שלושה רגעים שבהם החלליות יהיו על מישור אחד.

ג. * ארבע הולכי רגל הולכים במישור בקווים ישרים ובמהירויות קבועות. ברגע ההתחלתי הם לא נמצאים על ישר אחד ולא על מעגל אחד. הוכח כי יהיו לא יותר מארבעה רגעים כאלה שהאנשים יהיו על מעגל אחד.

2. נתונים שלושה מספרים חיוביים a, b, c . יוסי חישב את הסכום של השורשים החיוביים של משוואות $x^2 = ax + b$, $x^2 = bx + c$, $x^2 = cx + a$. שלומי חישב את סכום השורשים החיוביים של $x^2 = ax + a$, $x^2 = bx + b$, $x^2 = cx + c$. למי יצא סכום יותר גדול? הסכומים יצאו שונים.

3. מצא את כל הפונקציות (ממספרים ממשיים למספרים ממשיים) שמקיימות:
 $f(x - f(y)) = f(x) + f(f(y)) + x \cdot f(y) - 1$

4. מצא את כל הפונקציות (ממספרים ממשיים למספרים ממשיים) שמקיימות:
 $f(x) + f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|$

5. האם קיים פולינום ממשי בשני משתנים, שיש לו \inf אבל אין לו מינימום? כלומר, בלשון פחות מדעי, האם יתכן שקיים a ממשי שמקיים
(א) $p(x, y) > a$ לכל x, y ממשיים,
(ב) אבל אין $b > a$ כזה שעבורו $p(x, y) \geq b$ לכל x, y ממשיים.