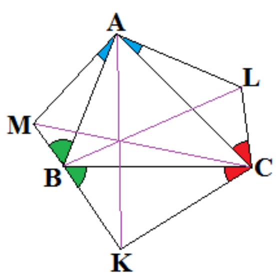
תרגיל 21
משפטי צ'בה ומנלאוס

1. נניח שמעגל מסוים חותך את צלעות של משולש ABC ב-6 נקודות שכולן שונות מהקודקודים: את BC בנקודות P, K, את AC בנקודות Q, L, ואת AB בנקודות R, M.
נניח בנוסף כי הישרים AP, BQ, CR נפגשים בנקודה אחת (או מקבילים).
הוכח כי גם הישרים AK, BL, CM נפגשים בנקודה אחת או מקבילים.

פתרון. לפי משפט של דרגת הנקודה $BP\cdot BK=BM\cdot BR$ וגם $CP\cdot CK=CQ\cdot CL$ וגם $AQ\cdot AL=AM\cdot AR$ (כאשר כל הזהויות כאן רשומים בקטעים מכוונים. לכן

$$\frac{CP\cdot AQ\cdot BR}{BP\cdot CQ\cdot AR}\cdot\frac{AL\cdot BM\cdot CK}{CL\cdot AM\cdot BK}=\frac{CP\cdot CK}{CQ\cdot CL}\cdot\frac{AQ\cdot AL}{AM\cdot AR}\cdot\frac{BM\cdot BR}{BP\cdot BK}=1$$

אבל AP, BQ, CR נפגשים או מקבילים, לכן לפי משפט צ'בה $\frac{CP\cdot AQ\cdot BR}{BP\cdot CQ\cdot AR}=-1$ לכן גם $\frac{AL\cdot BM\cdot CK}{CL\cdot AM\cdot BK}=-1$ לכן שוב לפי משפט צ'בה AK, BL, CM נפגשים בנקודה אחת או מקבילים**.**



2. על הצלעות של משולש ABC בונים כלפי חוץ משולשים (כך שצלעות ABC הם הבסיסים): BKC, CLA, AMB,
כך שיש שוויון זוויות שמסומנות באותו צבע בציור.
הוכח שהישרים AK, BL, CM נפגשים.

פתרון. נסמן ב- α,β,γ את הזוויות המתאימות של משולש ABC, וב- κ,λ,μ את גדלים של הזוויות של המשולשים שצמודים למשולש ABC שנמצאים בקודקודים A,B,C בהתאמה. למשל: $\measuredangle BAM=\kappa=\measuredangle LAC$.

תהיה P נקודת חיתוך של BC ו-AK. אז קל לראות כי $\frac{BP}{PC}=\frac{S_{AKB}}{S_{AKC}}$ (הרי שני האגפים שווים ליחס הגבהים מ-B ומ-C על AK).
באופן דומה אפשר לחשב את שי היחסים האחרים במכפלה של צ'בה ואז התנאי של משפט צ'בה יהפוך ל- $\frac{S_{AKB}}{S_{AKC}}\cdot\frac{S_{BLC}}{S_{BLA}}\cdot\frac{S_{CMA}}{S_{CMB}}=1$ ונשאר להוכיח את זה. כלומר

$$\frac{BA\cdot BK\cdot\sin(\beta+\lambda)/2}{CA\cdot CK\cdot\sin(\gamma+\mu)/2}\cdot\frac{CB\cdot CL\cdot\sin(\gamma+\mu)/2}{AB\cdot AL\cdot\sin(\alpha+\kappa)/2}\cdot\frac{AC\cdot AM\cdot\sin(\alpha+\kappa)/2}{BC\cdot BM\cdot\sin(\beta+\lambda)/2}=1$$

נצמצם את מה שמצטמצם ונקבל $\frac{BK}{CK}\cdot\frac{CL}{AL}\cdot\frac{AM}{BM}=1$.

אבל לפי משפט סינוסים $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}=\frac{\sin\kappa}{\sin\lambda}$; $\frac{\mathrm{CL}}{\mathrm{AL}}=\frac{\sin\mu}{\sin\kappa}$; $\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{CK}}=\frac{\sin\lambda}{\sin\mu}$.

לכן מכפלתם שווה 1 וזה מסיים את ההוכחה.

הערה. לא קשה גם לפתור את השאלה אם משתמשים במשפט צ'בה הזוויתי ארבע פעמים.

3. א. נסח והוכח משפט מנלאוס תלת מימדי.

ב. כל הצלעות של מרובע מרחבי ABCD משיקות לכדור.

הוכח שכל נקודות ההשקה נמצאות על מישור אחד.

פתרון. א. הניסוח הוא:

משפט מנלאוס תלת-מימדי. נניח שנקודות A, B, C, D לא נמצאות על מישור אחד ועל הישרים AB, BC, CD, DA נבחרו נקודות P, Q, R, S בהתאמה (שלא מתלכדות עם A, B, C, D). אזי הנקודות P, Q, R, S נמצאות על מישור אחד אם ורק אם

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{CQ}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{DR}}\cdot\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{AS}}=1$$

כאשר הרישום הוא בקטעים המכוונים.

כמובן, אשפר להכליל עוד יותר:

משפט מנלאוס רב-מימדי. נניח שנקודות $A_0, A_1, A_2, \dots, A_N$ נמצאות במרחב N מימדי אבל לא נמצאות על על-מישור אחד (כלומר מישור ממימד $N-1$). על הישרים $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{N-1}A_N, A_NA_0$ נבחרו נקודות $P_0, P_1, \dots, P_{N-1}, P_N$ בהתאמה (שלא מתלכדות עם A_k). אזי הנקודות $P_0, P_1, \dots, P_{N-1}, P_N$ נמצאות על על-מישור אחד אם ורק אם

$$\frac{A_0P_0}{A_0P_0}\cdot\frac{A_1P_1}{A_2P_1}\cdot\frac{A_2P_2}{A_3P_2}\cdot\ldots\cdot\frac{A_{N-1}P_{N-1}}{A_NP_{N-1}}\cdot\frac{A_NP_N}{A_1P_N}=1.$$

כאשר הרישום הוא בקטעים המכוונים.

הוכחות של משפט מנלאוס תלת-מימדי ורב-מימדי דומות מאוד להוכחה של משפט מנלאוס דו-מימדי. פשוט מבצעים הטלה על קוו ישר שתעביר את הנקודות $P_1, \dots, P_{N-1}, P_N$ לנקודה אחת. הפרטים הם תרגיל עבור הקוראים.

ב. אם המרובע המרחבי ABCD הוא מישורי, אז כל רביעייה של נקודות על הצלעות שלו נמצאת באותו מישור. אם הנקודות A, B, C, D לא נמצאות על מישור אחד, אז אפשר להשתמש במשפט מנלאוס התלת-מימדי. נסמן את נקודות ההשקה של בכדור עם הישרים AB, BC, CD, DA על ידי P, Q, R, S. שני משיקים מנקודה לכדור שווים באורכם

ולכן $AS = AP \;;\; BP = BQ \;;\; CQ = CR \;;\; DR = DS$. לכן $\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BQ}{CQ}\cdot\frac{CR}{DR}\cdot\frac{DS}{AS}=1$
ואז לפי משפט מנלאוס התלת-מימדי נקודות ההשקה על מישור אחד.

4. במישור נמצאים 4 ישרים במצב כללי – כלומר אף שניים לא מקבילים, אף שלושה לא נפגשים בנקודה אחת. לישרים אלה יש 6 נקודות חיתוך. לכל אחד מנקודות החיתוך יש נקודה אחת בדיוק שלא מחוברת אליה (למשל נקודת חיתוך של הישר הראשון והשני לא מחוברת אם נקודת החיתוך של הישר השלישי והרביעי). בצורה כזאת 6 נקודות חיתוך מחולקים ל-3 זוגות של נקודות לא מחוברות.
הוכח ששלוש אמצעי הקטעים שנוצרים על ידי זוגות הנקודות הלא מחוברות נמצאים על ישר אחד.
הערה. זה נקרא ***הישר של גאוס*** (Gauss).

פתרון. נכניס סימונים: קודקודים של משולש אחד שנוצר משלוש ישרים הם A, B, C והישר הרביעי חותך את BC ב-P, את AC ב-Q, ואת AB ב-R.
צריך להוכיח כי האמצעים של AP, BQ, CR שנסמן אותם K, L, M בהתאמה נמצאות על ישר אחד. לפי משפט מנלאוס $\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{AR}{BR}=1$. אבל עבור K, L, M עוד אי-אפשר לכתוב נוסחה דומה כי אין משולש שהן נמצאות על הצלעות שלו.

נסמן גם את האמצעים של BC, AC, AB על ידי A', B', C' בהתאמה.
אז הומותטיה אם מקדם $\frac{1}{2}$ ומרכז ב-A תעביר את B, C, P לנקודות K, B', C' בהתאמה.
מכאן שני מסקנות: K נמצא על הישר B'C', ובנוסף $\frac{B'K}{C'K}=\frac{CP}{BP}$.
באופן דומה גם L, M נמצאות על הצלעות המתאימות של משולש האמצעים A'B'C' ובנוסף $\frac{A'M}{B'M}=\frac{BR}{AR} \;;\; \frac{C'L}{A'L}=\frac{AQ}{CQ}$. לכן אפשר לבדוק כי K, L, M על ישר אחד באמצעות משפט מנלאוס לגבי במשולש A'B'C'. זה קל מאוד כי כבר חישבנו את היחסים:

$$\frac{A'M}{B'M}\cdot\frac{B'K}{C'K}\cdot\frac{C'L}{A'L}=\frac{BR}{AR}\cdot\frac{CP}{BP}\cdot\frac{AQ}{CQ}=\frac{1}{1}=1$$

מש"ל.

5.** לכמה חלקים יחולק מצולע משוכלל בעל 12 צלעות אם יעבירו את כל אלכסוניו?

תמצית פתרון.
נתחיל משאלה קומבינטורית פשוטה יותר: מה קורה למצולע קמור אקראי?
המצולע יקרא אקראי או גנרי אם אף שלוש אלכסוניו לא נפגשים בנקודה אחת.

ובכן, מכל רביעייה של קודקודים נוצרת נקודת חיתוך אלכסונים אחת בדיוק (כי הם יוצרים מרובע קמור) לכן יש $\binom{N}{4}$ נקודות חיתוך כאשר N הוא מספר הקודקודים.

כמות הנקודות בציור בסך הכול היא $\binom{N}{4}+N$. לכל אחת מנקודות החיתוך מגיעות ארבעה קטעים, ולכל אחד מהקודקודים מגיעים $N-1$ קטעים. אנחנו רוצים לחשב את כמות הקטעים בציור שאליהם מתחלקים האלכסונים והצלעות, כי אז נוכל לספור את כמות האזורים באמצעות נוסחא של אוילר $F-E+N=2$ כאשר E זה כמות הקטעים, F זה כמות התחומים שנוצרים במישור (בעצם צריך למצוא את $E - 1$ כי בנוסחת אוילר סופרים גם את התחום החיצוני). ובכן, כאשר סופרים את הזוגות {קטע, קצה שלו} אז מקבלים מצד אחד 2E (אם סופרים לפי קצוות) ומצד שני $(N-1)N+4\binom{N}{4}$.

לכן $E=2\binom{N}{4}+\binom{N}{2}$. לכן התשובה עבור מצולע אקראי היא:

$$E-N+1=2\binom{N}{4}+\binom{N}{2}-\left(\binom{N}{4}+N\right)+1=$$
$$=\binom{N}{4}+\frac{(N-1)N}{2}-(N-1)=\binom{N}{4}+\frac{(N-1)(N-2)}{2}=\binom{N}{4}+\binom{N-1}{2}$$

אפשר לבצע את אותו החישוב ללא משפט אוילר, על ידי ספירה כפולה של זוויות. סכום הזוויות החיצוניות במצולע כלשהו שווה ל 2π. לכן אם נסכם על כל הזוויות שיש בציור את $\pi-\alpha_j$ כאשר α_j היא גודל הזוויות נקבל את כמות התחומים כפול 2π. אם בנקודה i סכום הזוויות היא β_i ויש בה n_i זוויות, אז סכום הזוויות החיצוניות היא $n_i\pi-\alpha_i$. בכל נקודת חיתוך אלכסונים סכום הזוויות הפנימיות היא 2π ויש 4 זוויות, לכן התרומה לסכום היא $4\pi-2\pi=2\pi$. לכל קודקוד שזווית בה α_j ויש $N - 2$ זוויות נקבל $(N-2)\pi-\alpha_i$. נסכם הכל ונקבל שכמות החלקים H מקיימת

$$2\pi H=2\pi\binom{N}{4}N+N(N-2)\pi-\sum_{\substack{\text{זוויות}\\ \text{בקודקודי}\\ \text{המצולע}}}\alpha_i=2\pi\binom{N}{4}N+N(N-2)\pi-(N-2)\pi=$$
$$=2\pi\binom{N}{4}N+(N-1)(N-2)\pi$$

מחלקים ב- 2π ומקבלים אותה תשובה כמו קודם.

מצולע שנתון בשאלה (מצולע משוכלל) הוא אינו אקראי לכן בו יש פחות חלקים, מכיוון שיש אלכסונים שנחתכים בנקודה אחת. באופן כללי, בשביל לחשב את כמות החלקים

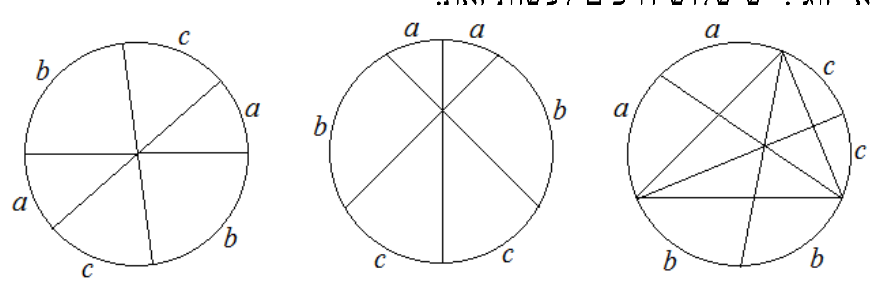
צריך להבין את כמות המפגשים האלה ואת סוגי המפגשים (כלומר כמה ישרים נפגשים בנקודה). אחרי שנבין את זה יישאר חישוב קומבינטורי.
אם N זוגי (כמו 12 למשל) אז יש את כל האלכסונים הגדולים שנפגשים במרכז ובנוסף, אם לוקחים את האלכסון הגדול אז המצולע סימטרי ביחס לאלכסון, לכן כל אלכסון נוסף חותך אותו באותה נקודה כמו אלכסון שסימטרי לא.
השאלה היא האם יש עוד דברים.

טענה. נניח שמשושה $ABCDEF$ חסום במעגל. אז AD, BE, CF נפגשים בנקודה אחת אם ורק אם $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

טענה זאת שקולה לחלוטין למשפט צ'בה הזוויתי, אבל אפשר להוכיח אותה גם ישירות מדמיון משולשים (וכך לקבל הוכחה נוספת של משפט צ'בה).

נסמן: $s_k = \sin\frac{2\pi k}{N}$. לפי טענה, אם A, B, ... הם קודקודים מסוימים של מצולע משוכלל בעל N צלעות, אז התנאי לכך שאלכסוניו יפגשו בנקודה הוא $s_a \cdot s_c \cdot s_e = s_b \cdot s_d \cdot s_f$ כאשר $a, b, c, \ldots$ זה כמות הקשתות הקטנות שנוצרות על המעגל החוסם על ידי קודקודי המצולע המשוכלל בין קודקודים של ABCDEF.
ובכן, בשביל למצוא את כל החיתוכים צריך למצוא את כל הזהויות הטריגונומטריות מהסוג $s_a \cdot s_c \cdot s_e = s_b \cdot s_d \cdot s_f$ כאשר $a+b+c+d+e+f = N$.

לזהות זאת יש פתרון טריביאלי: ניקח מספרים $2(a+b+c) = N$ ואז $s_a \cdot s_b \cdot s_c = s_a \cdot s_b \cdot s_c$ (כמובן, יש כאלה רק עבור N זוגי). זה נותן הרבה נקודות מפגש: זה כל הדרכים לסדר שני עותקים של a, של b ושל c במעגל כך שכל מספר יופיע פעם במקום זוגי ופעם במקום אי-זוגי. יש שלוש דרכים לעשות זאת:



שתי דרכים כבר הזכרנו קודם (סימטריה ביחס למרכז וסימטריה ביחס לקוטר). את התמונה הנוספת אפשר להסביר גם בלי משפט צ'בה, כי היא נובעת מכך שחוצי זוויות במשולש נפגשים בנקודה אחת.

חוץ מזה, יש גם זהויות טריגומטריות לא טריביאליות (ובאופן מפתיע, כאלה קיימים רק כאשר N מתחלק ב-6). למשל עבור $N = 12$ מתקיים: $s_1 \cdot s_1 \cdot s_5 = s_1 \cdot s_2 \cdot s_2$ וזאת הזהות הלא-טריביאלית היחידה שקיימת עבור מצולע משוכלל בעל 12 צלעות.

את הפרטים (למה הזהות הזאת נכונה, למה אין זהויות נוספות במצולע של משוכלל עם 12 קודקודים, איזה נקודות חיתוך זה נותן לנו והספירה הקומבינטורית של כמות החלקים) אנחנו נשאיר לקוראים כחומר למחשבה.

את פתרון השאלה עבור N כללי אפשר לראות במאמר של Poonen, Rubinstein :
http://www-math.mit.edu/~poonen/papers/ngon.pdf
הפתרון משתמש בתורת גלואה (בלי תורת גלואה זה כנראה יהיה סיוט טריגונומטרי).