תרגיל 20

1. א. נתונים 40 לוחות, ועל כל לוח רשום מספר ממשי. מותר לבחור תת-קבוצה של לא יותר מ-K לוחות ולהחליף את המספרים בכולם בממוצעת המספרים בתת-קבוצה זאת. עבור איזה K מינימלי אפשר להחליף את כל המספרים בממוצע של כולם?

ב. אותה שאלה כאשר בכל מהלך בוחרים בדיוק K לוחות (ולא לכל היותר K).

א. 5. ב. 10.

פתרון. א. נניח שעל אחד הלוחות רשום 1, ועל לוחות האחרים – אפסים. צריך להגיע למצב שעל כל לוח רשום $\frac{1}{40}$. אם כל הזמן נמצע פחות מ-5 לוחות, אז כל הזמן ניצור מספרים מהסוג $\frac{n}{2^k 3^m}$ כאשר k,m,n שלמים: אכן, ממוצע של 2, 3 או 4 כאלה זה שוב מספר מאותו סוג. כך אף פעם לא נגיע ל-40.

נניח ש-K שווה 5. אז אפשר לחלק את הלוחות לשמונה חמישיות ובכל חמישייה לעשות ממוצע. כעת נעשה הפוך – נבחר 5 שמיניות כאלה, כך שבכל שמיניה יש נציג מכל חמישייה. כל מה שצריך לעשות זה להחליף את המספרים בכל שמיניה בממוצע שלהם. אפשר לעשות את זה בכל שמיניה בנפרד הרי כל השמיניות אותו דבר. ובכן, מספיק להסביר מה עושים עם שמינייה בודדת.

ובכן, נחלק את השמינייה לשתי רביעיות ובכל רביעייה נעשה ממוצע. עכשיו נחלק את השמינייה לשתי רביעיות בצורה אחרת, כך שלכל רביעייה יש שני לוחות משותפים עם הרביעיות בחלוקה קודמת, ונעשה ממוצעים ברביעיות החדשות. כעת בכל השמינייה יש את הממוצע.

ב. נניח שעל אחד הלוחות רשום 1, ועל לוחות האחרים – אפסים. צריך להגיע למצב שעל כל לוח רשום $\frac{1}{40}$. אם כל הזמן נמצע בדיוק K לוחות, אז כל הזמן ניצור מספרים מהסוג $\frac{n}{\mathrm{K}^m}$ כאשר m,n שלמים. בשביל שנגיע ל-40 במחנה, K חייב להתחלק ב-2 וב-5, לכן K הוא לפחות 10.

נניח ש-K שווה 10. אז אפשר לחלק את הלוחות לארבע עשיריות ובכל עשירה לעשות ממוצע.

כעת ניקח שתי עשיריות, וניצור מהן שתי עשיריות חדשות – בכל עשירייה חדשה יהיו 5 נציגים מכל עשירייה קודמת, ונבצע מיצוע בעשיריות חדשות. נקבל מספרים זהים כבר על 20 לוחות. נעשה דבר דומה לשני עשיריות אחרות.

כעת נחלק את כל הלוחות ל-4 עשיריות, כאשר בכל עשירייה יהיו 5 נציגים מבין 20 לוחות מהקבוצה הראשונה, ונבצע מיצוע בכל עשייריה חדשה, ואז כבר כל המספרים יהיו שווים.

2. אבי בחר מספר מ-1 עד 144. יוסי מנסה לנחש אותו, באמצעות שאלות של כן ולא. על תשובה "כן" יוסי חייב לשלם 2 ₪, ועל תשובה "לא" הוא חייב לשלם 3 ₪. כמה כסף הוא צריך, כדי שיוכל בוודאות לגלות את המספר?

תשובה. 19

פתרון. נתחיל מהערה כללית על סוגי שאלות שיכולים להיות. נניח שיוסי כבר פסל מספר אפשרויות עבור מספר של אבי (0 או יותר) יש לו עדיין מספר של מספרים חשודים, והוא שואל שאלה מסוימת. לגבי כל שאלה, וכל מספר שאבי בחר, יש 3 מצבים: (1) או שאבי חייב לענות כן, (2) או שהוא חייב לענות לא, (3) או שהוא יכול לענות גם וגם. אם אבי עונה לא, אז יוסי פוסל את המספרים מהסוג הראשון, ואם הוא עונה כן, אז יוסי פוסל מספרים מהסוג השני (ובכל מקרה הוא לא פוסל מספרים מהסוג השלישי). לכן מבחינת יוסי הוא בכל מקרה ידע לא פחות אם לא יהיו מספרים מהסוג השלישי (למשל אם הוא היה מצליח לשנות את שאלתו כך שהמספרים מהסוג השלישי יצטרפו לסוג השני למשל).

לכן במקום כל השאלות היותר מתוחכמות יוסי יכול להיסתפק בשאלות מהסוג הבא: יוסי מראה לאבי רשימה של מספרים מהסוג הראשון ושואל: "האם המספר שלך נמצא ברשימה?"

a_n	n
0	1
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	4
7	5
8	7
9	9
10	12
11	16
12	21
13	28
14	37
15	49
16	65
17	86
18	114
19	151

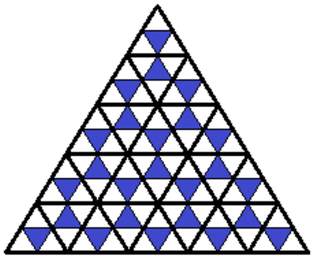
עבור כל מספר n נגדיר a_n: כמות המספרים החשודים שבינם אפשר להבדיל כאשר אסור לבזבז יותר מ-n ₪. קל לראות $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ כי אם יש לי פחות מ-3 ₪ אז לא כדאי לשאול שאלות כי אפשר לחרוג מהתקציב. את המספרים היותר גדולים מחשבים לפי נוסחא $a_{n+3} = a_n + a_{n+1}$. אכן, אם התשובה לשאלה הייתה "לא" אז נשאר פחות שלוש ₪ לכן צריכים להישאר לא יותר מאשר a_n מספרים חשודים, ואם התשובה הייתה "כן" אז נשאר פחות שני ₪ לכן צריכים להישאר לא יותר מאשר a_{n+1} מספרים חשודים. במקרה שיש לא יותר מאשר $a_n + a_{n+1}$ מספרים חשודים לא קשה לתכנן שאלה: רושמים רשימה של a_{n+1} מספרים חשודים כלשהם ושואלים את אבי האם המספר שלו ברשימה זאת.

לפי נוסחא זאת מחשבים a19 זה מספר הראשון שגדול או שווה ל-144 (ראה טבלא משמאל).

הערה. בשאלה המקורית (שהועתקה עם שגייה מאיזה ספר) המחירים של תשובות כן ולא היו 1 ו-2, ואז ברור שיוצאים מספרי פיבונצ'י.לפי זה גם נבחר 144 – זה מספר פיבונצ'י, אבל מספר מספיק גדול כדי שלא כולם יכירו אותו.

3. מטרה היא משולש שווה צלעות שמחולק ל-100 משולשים שווי צלעות חופפים על ידי שלוש משפחות של קווים מקבילים. צלף שמנסה לפגוע במשולש קטן מסוים, יכול לפגוע במשולש זה או באחד המשולשים הקטנים שיש לו איתם צלע משותפת. המשימה של הצלף היא שיהיו כמה שיותר משולשים קטנים שהוא פגע בהם 5 פעמים בדיוק. כמה משולשים כאלה הוא יכול להבטיח?

תשובה. 25.



פתרון. אפשר לחלק את המתרה גם ל-25 משולשים חופפים על ידי 3 משפחות של קווים מקבילים. כל משולש כזה מורכב מ-4 משבצות של המטרה. בכל משולש כזה של 4 משבצות נצבע בכחול את המשבצת המרכזית. יתכן שכל הפגיעות תהיינה במשבצות המסומנות, לכן אי-אפשר להבטיח לפגוע ביותר מאשר 25 משבצות 5 פעמים בדיוק.

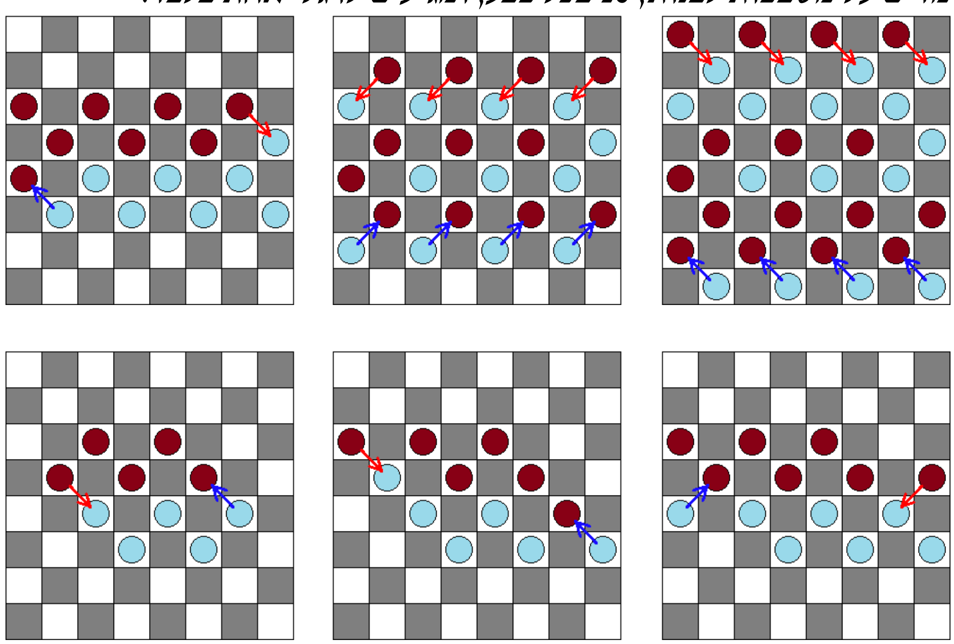
מצד שני, אפשר להציע אסטרטגיה שתאפשר פגיעה בשל 5 פעמים ב-25 משבצות. הצלף יכוון כל הזמן למשבצת מסומנת. אז הוא יפגע או בה או באחת מ-3 שכנים שלה. כך אחרי מספר יריעות באחת מבין 4 משבצות האלה יפגעו בדיוק 5 כדורים. ברגע זה הצלף יבחר משבצת מסומנת אחרת ויכוון עליה. כך הוא יצליח לפגוע 5 פעמים באחת מבין ה4 משבצות בכל אחת מבין 25 הרביעיות.

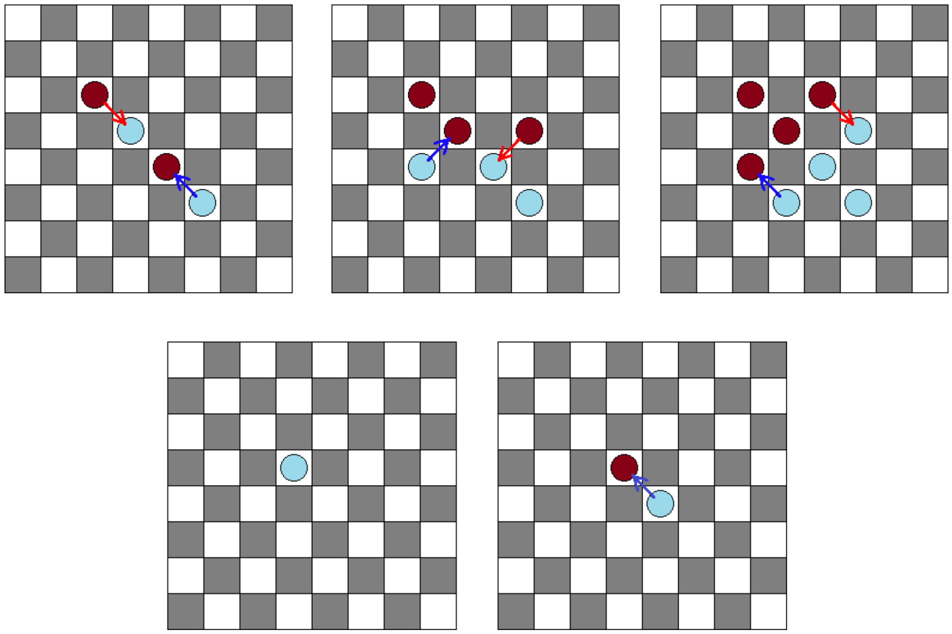
4. על לוח שח מעמידים 32 רגליים בצבע לבן ו-32 רגליים בצבע שחור (כך שכל המשבצות תפוסות). במשחק שלנו רגלי לא הופך למלכה או לכלי אחר אפילו אם הוא מגיע לשורה אחרונה. בכל טור רגלי מסוים חייב לאכול רגלי בצבע הפוך. מה הוא המספר הקטן ביותר של רגליים שיכולים להישאר בסוף המשחק?

תשובה. 2

פתרון. כאשר רגלי אוכל רגלי אחר הוא נשאר על משבצת מאותו צבע. לכן הרגלי שהיה במשבצת מצבע מסוים יכול לאכול רגלי או להיאכל על ידי רגלי שעומד על משבצת מאותו צבע. לכן תמיד יישאר רגלי על משבצת לבנה ועל משבצת שחורה. לכן אי אפשר פחות מ-2 רגליים.

נסביר כיצד להשאיר רק 2 רגליים. בסדרת התמונות להלן מתחילי אם 32 רגליים שעומדים על משבצות לבנות, 16 בכל צבע, ומגיעים לרגלי אחת בלבד.





אם נעשה מצב סימטרי על משבצות שחורות, ונבצע מהלכים באותה צורה, אז בסופו של דבר נהפוך 64 רגליים (32 מכל צבע) לשני רגליים בלבד.

5.* שני אנשים מחלקים גבינה. תחילה הראשון מחלק אותה לשני חלקים, אחריו השני בוחר בחלק אחד ומחלק אותו גם הוא לשני חלקים. כך הם ממשיכים עד שמתקבלים חמישה חלקים. כעת הראשון לוקח לעצמו חלק, אחריו השני לוקח לעצמו חלק מבין החלקים שנותרו, שוב תורו של הראשון לקחת וכך הלאה עד שלא ישארו חלקים. מצא/י מהי הכמות הרבה ביותר של גבינה שיכול כל אחד מהשניים להבטיח לעצמו, ללא תלות בפעולותיו של השני.

תשובה: הראשון יכול לקבל 3/5, והשני 2/5 מהגבינה.

פתרון. ברור שאחרי שחתכו את הגבינה, הראשון יכול לדאוג לכך החלק הכי גדול שיהיה אצלו יהיו החלק הכי גדול מתוך החמישה והחלק השני שלו יהיה לפחות כמו החלק השלישי בגודלו מהחמישה. (כמובן, השחקן השני יכול במהלך השני לקחת את החלק השני בגודלו, אבל אז רק הוא יפסיד). לכן, אפשר להניח, בלי הגבלת הכלליות, שהשחקן הראשון תמיד יקבל לאחר החלוקה את החלק הראשון, השלישי והחמישי בגודלו. בצורה דומה קל להראות, ששחקן שני תמיד יכול להבטיח לעצמו חלקים שני ורביעי (או משהו טוב יותר). לכן משקל של חלק ראשון + שלישי + חמישי לפי הגודל זה לא רק המינימום של מה ששחקן הראשון יכול להבטיח לעצמו אלא גם מקסימום. ובכן, אפשר להניח שבחלוקה הראשון יקבל חלקים ראשון, שלישי וחמישי, ומאותם סיבות אפשר להניח שבחלוקה האיש השני יקבל חלקים שני ורביעי.

אסטרטגית החלוקה עבור ראשון (כיצד לקבל 3/5 מהגבינה):

בהתחלה חותכים את הגבינה לשני חלקים : 2/5 ו 3/5

(1) נניח שהשני בחר לחלק את החלק הקטן, 2/5 לשני חלקים, Y,X כאשר $X\leqslant Y$.
אז כרגע יש 3 חלקים: X, Y, 3/5.

במקרה זה נחלק את X לשני חלקים שווים. אז יהיה: $X/2$, $X/2$, Y, 3/5.

(1.1) אם השני יבחר לחתוך כל חלק אחר, פרת ל- 3/5 הראשון יקבל את החלק הזה, ואז הוא מקבל 3/5 לפחות.

(1.2) אם השני יבחר לחתוך את החלק הגדול, יהיו $X/2$, $X/2$, Y, U, V. כאשר $V\leqslant U$. אז הראשון בהתחלה יכול לקחת לעצמו U. אם הוא ייקח גם את V אז כבר יהיו לו 3/5, לכן השני ינסה למנוע את זה ויצטרך לקחת V (שאינו עולה על 3/10 הרי $V\leqslant U$, ובנוסף $3/5=U+V$). אז הראשון ייקח Y, והשני ייקח $X/2$. אבל $X \leqslant 1/5$ ולכן $X/2 \leqslant 1/10$. ובכן, מה שהשני מקבל במצב זה אינו עולה על $3/10 + 1/10 =$ 2/5 כלומר במקרא זה הראשון מקבל 3/5 לפחות.

(2) נניח שהשני (במהלך ראשון שלו) בחר לחלק את החלק הגדול, 3/5 לשני חלקים שגדולים מ- 1/5, כלומר Y,X כאשר $1/5<X\leqslant Y<2/5$. אז כרגע יש 3 חלקים: X, Y, 2/5. (נשים לב כי $Y \geqslant 3/10 \geqslant X$, הרי $Y+X=3/5=6/10$).

אז הראשון יחתוך את Y לשני חלקים: 1/5 ו Z שקטן מ- 1/5. כרגע יש 4 חלקים: 2/5, 1/5, X, Z (כאשר $Z<1/5<X$) מקודם שמנו לב, כי $Y \geqslant 3/10$ ולכן $Z \geqslant 1/10$.

כעת יש לשני מספר אפשרויות:

(2.1) נניח שהשני יחתוך את 2/5 לשני חלקים, U ו-V. אז יש 5 חלקים, שהם 1/5, X, Z, U, V, ונתון $U+V=2/5=Z+X$. לכן החלק הגדול ביותר + החלק הקטן ביותר זה 2/5, ו 1/5 זה החלק האמצעי בגודלו. כמו שהסברנו מלכתחילה, אפשר להניח שהראשון מקבל את החלקים הכי גדול, הכי קטן ואמצעי, וסכומם במקרה זה 3/5.

(2.2) אם האיש השני במהלך השני שלו יחליט לפצל את Z, אז הראשון ייקח תחילה את 2/5, ואחרי זה את 1/5 (או את X שזה עוד יותר גדול) ואז כבר יהיו לו 3/5.

(2.3) אם האיש השני יבחר לחתוך את X אז יהיו 2/5, 1/5, Z, U, V כאשר $Z+U+V= 2/5$. אז הראשון ייקח את 1/5. אם השני לא ייקח את 1/5, אז הראשון יוכל לקחת אותו כבר במהלך הבא ואז כבר יהיו לו 3/5. לכן נניח שהשני ייקח את 1/5 בהזדמנות הראשונה. אז הראשון ייקח את החלק הגדול מבין U,V, Z, השני ייקח את החלק השני, וראשון ייקח את מה שיישאר. ברור שבחלוקה של $Z+U+V$ הראשון קיבל לפחות חצי מהסכום, כלומר לפחות 1/5 וביחד עם 2/5 שהיו לו 3/5.

(2.4) במקרה שהשני יבחר במהלך השבי שלו לחלק את 1/5 , נגיד, ל- U ו-V, $U \leqslant V$ יהיו 5 חלקים: U, V, X, Z, 2/5. אנחנו ראינו מקודם ש- $1/10 \leqslant Z < 1/5$ ולכן $U \leqslant Z$ (הרי אחרת $1/5 \leqslant 2Z < 2U \leqslant V+U=1/5$). ובכן, הראשון ייקח 2/5. אז השני יצטרך לקחת את X, אחרת ראשון ייקח את X וכבר יהיו לו 3/5 מהכל. אז הראשון ייקח את V. אז השני יעדיף לקחת את Z ולא את U, כי Z יותר גדול. אז הראשון יקבל גם את U ויהיה לו $U+V+2/5=2/5+1/5=3/5$.

(3) אפשרות אחרונה: השני, במהלך ראשון שלו בחר לחלק את החלק את החלק הגדול, 3/5 לשני חלקים שאחד מהם אינו גדול יותר מאשר 1/5, כלומר X,Y כאשר $X \leqslant 1/5$, ואז $Y \geqslant 2/5$. אז כרגע יש 3 חלקים: X, Y, 2/5.

אז נחלק את החלק 2/5 לשני חלקים: X ו- Z. ברור ש $X \leqslant 1/5 \leqslant Z$. ברור בנוסף ש $Y=1/5+Z$ הרי $X+Y=1/5+X+Z$. כרגע יש 4 חלקים: X, X, Y, Z.

(3.1) אם השני יחליט לפצל את Z, אז הראשון יוכל לקחת את Y ואת אחד ה-X-ים וזה כבר 3/5.

(3.2) נניח שהשני יחליט לפצל את אחד מה-X-ים. אז הראשון ייקח את Y, ואחר כך הוא יוכל לקחת או את Z (במקרה הטוב), או את X שעוד לא פוצל (במקרה הגרוע) ובכל מקרה כבר יהיו לו 3/5, הרי $X+Y=3/5$, ובנוסף $X \leqslant Z$.

(3.3) נניח, שהשני בחר לפצל את Y לשני חלקים, U, V. מקבלים X, X, Z, U, V.

(3.3.1) אם גם U וגם V קטנים מאשר Z הראשון ייקח תחילה את Z ואז הוא יוכל להבטיח לעצמו את אחד מהX ים ואת אחד מנציגי הזוג U, V (הרי כאשר השני ייקח חלק מסוים מתוך זוג U, V או מזוג X, X הראשון ניקח את החלק הנותר). אז, נגיד שהראשון מקבל $X+U+Z$ או $X+V+Z$ וזה בכל מקרה גדול יותר מ- $X+U+V=3/5$.

(3.3.2) אם אחד מהמספרים U, V גדול מ Z. נניח ש $Z<U$, ואז גם $1/5<U$ (לגבי V לא יודעים). אז הראשון ייקח את U, ויוכל להבטיח לעצמו חלק אחד גם מזוג X, X וחלק אחד מזוג V, Z. אם הוא יקבל את $U+V+X$ אז זה בדיוק 3/5, אחרת הוא יקבל $U+Z+X=U+2/5>3/5$ ושוב מקבלים יותר מאשר 3/5.

אסטרטגיה עבור השני (כיצד לקבל 2/5 מהגבינה)

יש מספר מקרים

(1) אם לאחר המהלך הראשון נוצרים שני חלקים, ששניהם גדולים או שווים ל 2/5, השני יחתוך חתיכה קטנה מהחלק הגדול, כך שיישאר חלק שעדיין יותר גדול

מאשר 2/5 מהכל. כרגע יש לנו שני חלקים X, Y שגדולים או שווים ל 2/5, ועוד חלק קטן.

(1.1) אם הראשון יחליט לחתוך את החלק הקטן, גם השני יחתוך ממנו. אז יוצרו 3 חלקים קטנים, ושני שלקים גדולים X ו- Y. השני יוכל לקחת אחד מהם ולקבל 2/5.

(1.2) אם הראשון יבחר לחתוך את אחד החלקים הגדולים, נגיד את X. הוא יחתוך את Xל $Z+U$, כאשר, $U\leqslant Z$. אז U קטן מ 2/5 ולכן קטן מ- Y.

לכן לשחקן השני יש אפשרות לחתוך את Y לשני חלקים, $T+U$. אז השני יכול להבטיח שהוא יקבל את אחד ה-Uים, וגם יקבל Z או T, ולכן הוא יקבל בסך הכל X או Y וזה לפחות 2/5.

(2) כאשר במהלך הראשון נוצר חלק אחד שקטן או שווה ל 1/5 (וחלק שני הוא לפחות 4/5) אז השני יחלק את החלק הגדול לשני חלקים שווים. אז אנחנו נגיע למצב שזהה למקרה (1), ושם כבר הסברנו כיצד לנצח.

אז השני יפצל את החלק הגדול לשני חלקים שווים.

(3) הראשון במהלך הראשון שלו מחליט ליצור שני חלקים, שהקטן מהם גדול מ 1/5 וקטן מ 2/5 (ואז החלק השני גדול מ 3/5 וקטן מ 4/5).

אז השני יחתוך את החלק הגדול לשני חלקים שאחד מהם 2/5. אז יהיו 3 חלקים: 2/5, X ו- Y, כאשר X ו- Y גדולים מ- 1/5 אבל קטנים מ- 2/5 (וסכומם 3/5).

עכשיו יש שני אפשרויות בהתאם למהלך של הראשון:

(3.1) אם השני יחליט לחתוך 2/5 ל- $V+U$ אז השני יחתוך, נגיד, את Y ל- $Z+1/5$. אז יהיו לנו: 1/5, Y, Z, U, V כאשר $2/5=Y+Z=V+U$. במקרא זה השני מקבל 2/5 בדיוק (אנחנו הסברנו את זה בסעיף (2.1) של האסטרטגיה עבור השחקן הראשון, ולכן לא נחזור על זה).

(3.2) אם הראשון יבחר לחתוך את X או את Y. נניח שאת X, לשני חלקים, Z ו- T. אז כרגע יש 4 חלקים: 2/5, Y, Z, T, כאשר $3/5=Y+T+Z$. נניח ש $T\leqslant Z\leqslant Y$

(אחרת נשנה שמות של החלקים) אז $1/5\leqslant Y<2/5$, $T\leqslant 1/5$.

אז השחקן השני יחתוך את 2/5 ל $S+Y$. אז יש 5 חלקים: Y, Y, Z, S, T. השני תמיד יכול לקחת את אחד ה-Yים ובנוסף Z או S. בכל מקרה, $S+Y$ זה 2/5 וגם $Y+Z$ זה לפחות 2/5.

הערה. הייתי שמח לשמוע פתרון בגישה פחות מלוכלכת, שתאפשר גם לענות על שאלה דומה במקרה שמחלקים את הגבינה ל-7 חלקים ולא ל-5 בלי להאריך את הפתרון.