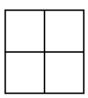
1) במסיבה יש 5771 אנשים. כל אחד מכיר חלק מהאנשים, כאשר אם אדם א' מכיר את אדם ב' אז גם אדם ב' מכיר את אדם א'. הוכח שקיימים שני אנשים שמכירים את אותו מספר של אנשים.

פתרון. סה"כ יש 5771 אנשים. כל איש יכול להכיר מ-0 עד 5770 אנשים אחרים, שזה נותן 5771 אפשרויות. מצד שני, לא יכול להיות כי איש אחד מכיר 5770 אנשים (כלומר את כולם) ואיש אחר מכיר 0 אנשים (כלומר אף אחד). כי אז האיש הראשון מכיר את כולם, וגם את האיש השני, והאיש השני לא מכיר אותו, וזה לא יתכן.
לכן העצם כאשר מסתכלים על כמויות אנשים שכל אחד מכיר יש לכל היותר 5770 אנשים שונים, וסה"כ יש 5771 אנשים, אז לשני אנשים יש אותו מספר.

2) בריבוע שצלעו 1 סימנו 5 נקודות. הוכח שיש זוג נקודות שהמרחק ביניהן אינו עולה על $\frac{1}{\sqrt{2}}$.



פתרון. נחלק את הריבוע ל-4 ריבועים קטנים יותר. אז לפחות שתיים מבין חמש הנקודות נמצאות באותו ריבוע קטן. מרחק בין שתי נקודות הללו אינו עולה על אורך האלכסון של הריבוע הקטן, והוא שווה ל-$\frac{1}{\sqrt{2}}$.

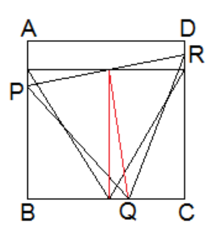
3) רושמים בשורה 31 מספרים. הוכח שניתן לבחור מתוכם רצף מספרים סמוכים, שסכומם מתחלק ב-31.

פתרון. נסנן את המספרים בשורה המקורית $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{31}$. כעת נתבונן במספרים:

$$0,\ a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ \ldots,\ a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{31}$$

זה בעצם הסכומים החלקיים של השורה המקורית. בשורה החדשה יש 32 מספרים, לכן לשני מספרים בשורה החדשה יש אותה שארית בחלוקה ל-31. לכן הפרש של שני מספרים בשורה החדשה מתחלק ב-31. אבל בעצם הפרש של שני מספרים בשורה החדשה זה סכום של רצף מספרים בשורה במקורית, מש"ל.

4) נתון ריבוע, ובנוסף 4321 משולשים משוכללים שחסומים בו (כל שלושת הקודקודים של כל משולש נמצאים על שפת הריבוע). הוכח שקיימת קבוצה של 1081 משולשים שנחתכים בנקודה אחת לפחות.



פתרון. נניח שמשולש PQR חסום בריבוע ABCD בצורה כזאת: P על AB, Q על BC, R על CD. תהי M אמצע PR. יהיו P_2, Q_2, R_2 עקבי האנכים מ-M ל-AB, BC, CD בהתאמה. אז המשולשים MPP_2, MQQ_2, MRR_2 דומים. לכן M נמצאת באותו מרחק מהצלעות AB ו-BC ובמרחק גדול פי $\sqrt{3}$ מ-BC. זה קובע אותה ביחידות. לכן לכל המשולשים החסומים שאין להם קודקוד על AD יש נקודה משותפת M.
דבר דומה אפשר להגיד על משולשים חסומים שלא נוגעים ב-AB, על משולשים שלא נוגעים ב-BC, ועל משולשים שלא נוגעים ב-CD.

ובכן משולשים חסומים מתחלקים באופן טבעי לארבעה סוגים, סה"כ יש 4321 משולשים, לכן יש לפחות 1081 משולשים מאותו סוג, והמשולשים האלה נחתכים בנקודה אחת כמו שראינו.

5) בחרו וקטורים $v_1, v_2, ..., v_{2003}$ במרחב תלת מימדי, כאלה שכל הקואורדינאטות של כל וקטור נמצאות בתחום [-1,1]. הוכח שבביטוי $\pm v_1 \pm v_2 \pm ... \pm v_{2003}$ אפשר לבחור סימנים כך, שאורך הווקטור שיתקבל יהיה קטן מ-10.

פתרון. כל הווקטורים נמצאים בקוביה 2×2×2. נחלק אותה ל-8 קוביות 1×1×1. אז יהיו וקטורים שנמצאים באותה קוביה 1×1×1. עם שני וקטורים נמצאים באותה קוביה 1×1×1, אז אפשר להחליף את שני הווקטורים האלה בהפרש שלהם, הרי זה וקטור מאותו סוג. בצורה כזאת אפשר להקטין את כמות הווקטורים, כל עוד יש יותר מ-8 וקטורים.

בעצם, לכל וקטור אפשר לשנות את הסימן שלו בלי לשנות את השאלה באופן מהותי. לכן אפשר להניח ללא הגבלת הכלליות שלכל הווקטורים קואורדינטה z אינה שלילית. אז התחום שבו נמצאים הווקטורים בעצם מכוסה על ידי 4 קוביות 1×1×1. לכן אפשר להקטין את כמות הווקטורים אפילו אם יש יותר מ-4 וקטורים.

ובכן, אפשר להקטין את כמות הווקטורים מ-2003 ל-4. כל וקטור מבין 4 הווקטורים האלה קטן באורכו מ-$\sqrt{3}$, לכן סכומם זה וקטור שקטן באורכו מ-$4\sqrt{3}$, וזה בטוח קטן מ-8 ובוודאי קטן מ-10.

הערה. כמובן שגם $4\sqrt{3}$ זה לא חסם הדוק. חסם בדוק הוא $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ אבל זה לא פשוט לכן אנחנו לא נוכיח את זה כאן.

6. נתונים $n > 2$ מעגלים שרדיוסיהם 1 ומרכזיהם $O_1, O_2, \dots, O_n$. אף ישר לא חותך יותר משתי מעגלים נתונים. הוכח כי $\sum_{i<j} \frac{1}{O_iO_j} < \frac{n\pi}{4}$.

פתרון. נעביר משיקים ממרכז מעגל מספר i למעגל מספר j. משיקים כאלה יוצרים זוויות שנסמן אותן α_{ij}. לכל i נקבל $\sum_{j\neq i} \alpha_{ij} < 180^\circ = \pi$, אחרת יהי ישר שמעובר דרך מרכז של מעגל מספר i וחותך עוד שני מעגלים.

מצד שני, קל לראות ש- $\frac{1}{O_iO_j} = \sin\frac{\alpha_{ij}}{2} < \frac{\alpha_{ij}}{2}$.

לכן $\sum_{\substack{i,j \\ i<j}} \frac{1}{O_iO_j} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \frac{1}{O_iO_j} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} \frac{1}{O_iO_j} < \frac{1}{4}\sum_i \sum_{j\neq i} \alpha_{ij} < \frac{n\pi}{4}$.