תרגיל 18

שלילה באי-שוויונים

רעיון של שיטת השלילה באי-שוויונים הוא פשוט: במקום להוכיח ש- $a<b$ נניח כי $a\ge b$ ונגיע לסתירה. או לחלופין אם מבקשים כי $a\ge b$ גורר $c\ge d$ ננסה להוכיח כי $c<d$ גורר $a<b$ (אולי זה יותר קל?).

1. נניח כי $a^2+b^2+c^2+abc=4$ כאשר $a,b,c\ge 0$. הוכח כי $a+b+c\le 3$.

פתרון. באופן שקול מספיק להוכיח כי אם $a+b+c>3$ אז $a^2+b^2+c^2+abc>4$.
במקרה זה אפשר למצוא $0<k<1$ כזה ש- $ka+kb+kc=3$.
נסמן $x=ka, y=kb, z=kc$. אז נתון כי $u+v+w=3$ ורוצים להוכיח כי
$$\frac{u^2+v^2+w^2}{k^2}+\frac{uvw}{k^3}>4.$$
היות וחלוקה בחזקות של k מגדילה את המספר, מספיק להראות כי
$$u^2+v^2+w^2+uvw\ge 4$$
במילים אחרות:
$$\left(u^2+v^2+w^2\right)\frac{u+v+w}{3}+uvw\ge 4\left(\frac{u+v+w}{3}\right)^3$$
$$9\left(u^2+v^2+w^2\right)\left(u+v+w\right)+27uvw\ge 4\left(u+v+w\right)^3$$
$$9\left(u^3+v^3+w^3\right)+9\sum_{sym}u^2v+27uvw\ge 4\left(u^3+v^3+w^3\right)+12\sum_{sym}u^2v+24uvw$$
$$5\left(u^3+v^3+w^3\right)-3\sum_{sym}u^2v+3uvw\ge 0$$
האי-שוויון האחרון נכון כי הוא סכום של ארבע אי-שוויונות נכונים: הראשון הוא $\left(u^3+v^3+w^3\right)-\sum_{sym}u^2v+3uvw\ge 0$ וזה אי-שוויון שור שכבר מוכר לנו (תרגיל 7 שאלה 4), השני הוא $2\left(u^3+v^3-u^2v-v^2u\right)\ge 0$ ועוד שני אי-שוויונים שסימטריים לאי-שוויון האחרון שרשמנו. את האי-שוויונים האלה קל להוכיח:
$$u^3+v^3-u^2v-v^2u=\left(u+v\right)\left(u-v\right)^2\ge 0.$$

2. נתון כי $a,b,c\ge 0$ ובנוסף $a^3+b^3+c^3+5\left(ab+bc+ca\right)=18$. הוכח כי $a+b+c\le 3$.

פתרון. כמו בשאלה הקודמת, זה שקול לטענה הבאה: אם $a+b+c=3$ גורר את $a^3+b^3+c^3+5\left(ab+bc+ca\right)\ge 18$.
אי-שוויון שצריך להגיע הוא מדרגה מעורבת, אבל אפשר להפוך אותו לאי-שוויון הומוגני על ידי הכפלת מונומים מדרגה נמוכה בחזקות של $\frac{a+b+c}{3}$ שהוא שווה ל- 1. פעולה כזאת נקראת הומוגניזציה. היא לפעמים מסבכת את אי-שוויון, אבל היא

מעבירה אותכם מאי-שוויון שנכון תחת אילוץ $a+b+c=3$ לאי-שיווין שנכון לכל המספרים החיוביים, לכן אולי יהיה יותר קל להוכיח אותו. במקרה שלנו:

$$a^3+b^3+c^3+5(ab+bc+ca)\frac{a+b+c}{3}\ge 18\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)+5(ab+bc+ca)(a+b+c)\ge 2(a+b+c)^3$$

$$a^3+b^3+c^3-\sum_{sym}a^2b+3abc\ge 0$$

וזה אי-שוויון שור שאנחנו כבר מכירים אותו (מי שלא, בבקשה לחזור על תרגיל 7).

3. נתונים n מספרים חיוביים שמקיימים $x_1x_2x_3\cdot\ldots\cdot x_n=1$. הוכח כי

$$\frac{1}{x_1+n-1}+\frac{1}{x_2+n-1}+\ldots+\frac{1}{x_n+n-1}\le 1\ .$$

פתרון. כאשר מעלים את ה-x-ים (לא משנה איזה), אז $x_1x_2x_3\cdot\ldots\cdot x_n$ עולה ו- $\frac{1}{x_1+n-1}+\frac{1}{x_2+n-1}+\ldots+\frac{1}{x_n+n-1}$ יורד. לכן מה שצריך להוכיח שקול לכך, ש- $\frac{1}{x_1+n-1}+\frac{1}{x_2+n-1}+\ldots+\frac{1}{x_n+n-1}=1$ גורר את $x_1x_2x_3\cdot\ldots\cdot x_n\le 1$.

(תרגיל פשוט: לנסח את השיקול שעשינו בלשון פורמלי.)

ובכן בהינתן $\frac{1}{x_1+n-1}+\frac{1}{x_2+n-1}+\ldots+\frac{1}{x_n+n-1}=1$ ברור כי

$$\frac{1}{x_i+n-1}=1-\sum_{i\ne k}\frac{1}{x_i+n-1}=\sum_{i\ne k}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{x_i+n-1}\right)=\sum_{i\ne k}\frac{x_i}{(n-1)(x_i+n-1)}=$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i\ne k}\frac{x_i}{x_i+n-1}\ge\left(\prod_{i\ne k}\frac{x_i}{x_i+n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

נכפיל את האי-שוויונים שהתקבלו: $\frac{1}{x_i+n-1}\ge\left(\prod_{i\ne k}\frac{x_i}{x_i+n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

הרבה דברים יצטמצמו ונקבל את ה- $\sqrt[n-1]{\ }$ של מש"ל.

*4. נתון כי $a,b,c\ge 0$ ובנוסף $ab+bc+ca\ne 0$. הוכח כי

$$\sqrt{\frac{a}{b+3c}}+\sqrt{\frac{b}{c+3a}}+\sqrt{\frac{c}{a+3b}}\ge\frac{3}{2}\ .$$

פתרון. נסמן: $\frac{z^2}{4}=\frac{c}{a+3b}$, $\frac{y^2}{4}=\frac{b}{c+3a}$, $\frac{x^2}{4}=\frac{a}{b+3c}$. אז צריך להוכיח כי $x+y+z\ge 3$. נניח בשלילה כי $x+y+z<3$.

כיצד לשחזר את a,b,c בהינתן x,y,z? קל לראות שהם מוגדרים עד כדי קפל בקבוע. קל לראות גם, שמה שמגדיר אותם אלה משוואות ליניאריות:

$$-4a+x^2b+3x^2c=0$$
$$3y^2a-4b+y^2c=0$$
$$z^2a+3z^2b-4c=0$$

במשוואות האלה x, y, z ששונים מ-0 נתונים, ואנחנו רוצים לשחזר את a, b, c שרובם לא שווים ל-0. עגב, מערכת משוואות ליניאריות שהחלק הימני שלהם מתאפס נקראת מערכת הומוגנית, ותמיד יש לה פתרון (0,0,0), אזל אנחנו רוצים שיהיו למערכת הזאת פתרונות אחרים. מהמשוואה הראשונה מתקבל a:

$$a=x^2\frac{b+3c}{4}$$

ואפשר להציב אותו בשתי המשוואות האחרות

$$3y^2x^2\frac{b+3c}{4}-4b+y^2c=\left(\frac{3}{4}y^2x^2-4\right)b+\left(\frac{9}{4}y^2x^2+y^2\right)c=0$$
$$z^2x^2\frac{b+3c}{4}+3z^2b-4c=\left(\frac{z^2x^2}{4}+3z^2\right)b+\left(\frac{3z^2x^2}{4}+3z^2\right)c=0$$

כדי שתהיה למערכת פתרון שהוא לא (0,0,0) אחת משתי המשוואות האחרונות צריכה להיות כפולה של השנייה. דרך אחרת לרשום את אותו התנאי היא שהדטרמיננטה של מערכת משוואות המקורית חייבת להתאפס (למי שיודע אלגברה לינארית, ומי שלא – נא לשאול את המדריך האזורי).

כך או כך מתקבל תנאי על x, y, z לכך שלמערכת משוואות יש פתרון לא טריביאלי, והוא: $0=-64+x^2y^2z^2+27x^2y^2z^2+12\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$.

באופן שקול $64=28x^2y^2z^2+12\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$ או

$$16=7x^2y^2z^2+3\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$$

וזה חייב להתקיים בהנחה ש-$x+y+z<3$. ניקח $u=kx \quad , \quad v=ky \quad , \quad w=kz$ חיוביים כאלה ש- $u+v+w=3$. אז $16<7u^2v^2w^2+3\left(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2\right)$.

אבל אנחנו נוכיח שזה לא נכון, כלומר שאם $u+v+w=3$ אז $16\ge 7u^2v^2w^2+3\left(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2\right)$.

נעשה הומוגניזציה: בכל מקום שהחזקה קטנה מ-6 נכפיל בחזקה משלימה של $\frac{u+v+w}{3}$. (זה יאפשר לנו לוותר על התנאי של $u+v+w=3$). נקבל:

$$\frac{16}{729}(u+v+w)^6\ge 7u^2v^2w^2+\frac{1}{3}(u+v+w)^2\left(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2\right)$$

$$\frac{16}{729}\left(\sum_{cyc}u^6+6\sum_{sym}u^5v+15\sum_{sym}u^4v^2+20\sum_{cyc}u^3v^3+30\sum_{cyc}u^4vw+60\sum_{sym}u^3v^2w+90u^2v^2w^2\right)\ge$$
$$\ge 7u^2v^2w^2+\frac{1}{3}\left(\sum_{cyc}u^2+2\sum_{cyc}uv\right)\sum_{cyc}u^2v^2$$

$$16\sum_{cyc}u^6+96\sum_{sym}u^5v+240\sum_{sym}u^4v^2+320\sum_{cyc}u^3v^3+480\sum_{cyc}u^4vw+960\sum_{sym}u^3v^2w+1440u^2v^2w^2\geq$$
$$\geq 5103u^2v^2w^2+243\sum_{sym}u^4v^2+729u^2v^2w^2+486\sum_{cyc}u^3v^3+486\sum_{sym}u^3v^2w$$

$$16\sum_{cyc}u^6+96\sum_{sym}u^5v+480\sum_{cyc}u^4vw+474\sum_{sym}u^3v^2w\geq 4392u^2v^2w^2+3\sum_{sym}u^4v^2+166\sum_{cyc}u^3v^3$$

אי-שוויון זה מתפרק לסכום של אי-שוויונים הבאים:

(א) $6\sum_{cyc}u^6\geq 3\sum_{sym}u^4v^2$ וזה סכום של אי-שוויונים מסוג $u^6+v^6\geq u^4v^2+u^2v^4$

(ב) $83\sum_{sym}u^5v\geq 166\sum_{cyc}u^3v^3$ וזה סכום של אי-שוויונים מסוג $u^5v+v^5u\geq 2u^3v^3$

(ג) $10\sum_{cyc}u^6+13\sum_{sym}u^5v+480\sum_{cyc}u^4vw+474\sum_{sym}u^3v^2w\geq 4392u^2v^2w^2$ וזה מסקנה ישירה של אי-שוויון הממוצעים.

מש"ל.

5**. נתון כי $a,b,c\geq 0$ ובנוסף $ab+bc+ca\neq 0$. הוכח כי

$$\sqrt{1+\frac{48a}{b+c}}+\sqrt{1+\frac{48b}{a+c}}+\sqrt{1+\frac{48c}{a+b}}\geq 15.$$

פתרון. יהי $1+\frac{48c}{a+b}=(1+4r)^2$, $1+\frac{48b}{a+c}=(1+4q)^2$, $1+\frac{48a}{b+c}=(1+4p)^2$.

אז בעצם דורשים להוכיח כי $p+q+r\geq 3$.

נניח בשלילה כי $p+q+r<3$. אז קיים $1>k$ כזה ש- $r=kz$, $q=ky$, $p=kx$ כאשר $x+y+z=3$.

כיוון ש- $\frac{c}{a+b}=\frac{2r^2+r}{6}$, $\frac{c}{a+b}=\frac{2q^2+q}{6}$, $\frac{a}{b+c}=\frac{2p^2+p}{6}$, ותמיד מתקיימת זהות $\sum_{cyc}\frac{ab}{(a+b)(a+c)}+2\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1$ (שהיא תרגיל פשוט לקוראים),

אזי $\sum_{cyc}\frac{(2p^2+p)(2q^2+q)}{36}+2\frac{(2p^2+p)(2q^2+q)(2r^2+r)}{216}=1$.

לכן $\sum_{cyc}\frac{(2x^2+x)(2y^2+y)}{36}+\frac{1}{108}\prod_{cyc}(2x^2+x)>1$ או במילים אחרות

$$3\sum_{cyc}(2x^2+x)(2y^2+y)+\prod_{cyc}(2x^2+x)>108$$

וזה בתנאי ש- $x+y+z=3$. אם זה נגיע לסתירה, כי האמת היא שבתנאים אלה

$$3\sum_{cyc}(2x^2+x)(2y^2+y)+\prod_{cyc}(2x^2+x)\leq 108$$

נעשה הומוגניזציה: בכל מקום שהחזקה קטנה מ-6 נכפיל בחזקה משלימה של $\frac{x+y+z}{3}$. נקבל:

$$3\sum_{cyc}\left(2x^2+x\cdot\frac{x+y+z}{3}\right)\left(2y^2+y\cdot\frac{x+y+z}{3}\right)+\prod_{cyc}\left(2x^2+x\cdot\frac{x+y+z}{3}\right)\le 108\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^6$$

$$\frac{1}{3}\sum_{cyc}\left(7x^2+xy+xz\right)\left(7y^2+yx+yz\right)+\frac{1}{27}\prod_{cyc}\left(7x^2+xy+xz\right)\le\frac{4}{3}(x+y+z)^4$$

$$\frac{xyz}{27}\prod_{cyc}(7x+y+z)\le\frac{1}{3}\left(4(x+y+z)^4-\sum_{cyc}\left(7x^2+xy+xz\right)\left(7y^2+yx+yz\right)\right)$$

$$\frac{xyz}{27}\left(\sum_{cyc}7x^3+\sum_{sym}(1+49+7)x^2y+(343+1+1+7+7+7)xyz\right)\le$$

$$\le\frac{1}{3}\left(\begin{array}{l}4\left(\sum_{cyc}x^4+4\sum_{sym}x^3y+6\sum_{cyc}x^2y^2+12\sum_{cyc}x^2yz\right)-\\ -\sum_{cyc}\left(49x^2y^2+7x^3y+7y^3x+7x^2yz+7y^2xz+x^2y^2+x^2yz+y^2xz+z^2xy\right)\end{array}\right)$$

$$\frac{xyz}{27}\left(\sum_{cyc}7x^3+\sum_{sym}57x^2y+366xyz\right)\le$$

$$\le\frac{1}{3}\left(4\left(\sum_{cyc}x^4+4\sum_{sym}x^3y+6\sum_{cyc}x^2y^2+12\sum_{cyc}x^2yz\right)-\sum_{cyc}\left(50x^2y^2+17x^2yz\right)-7\sum_{sym}x^3y\right)$$

$$xyz\left(\sum_{cyc}7x^3+\sum_{sym}57x^2y+366xyz\right)\le 9\left(4\sum_{cyc}x^4+9\sum_{sym}x^3y+31\sum_{cyc}x^2yz-26\sum_{cyc}x^2y^2\right)=$$

$$=(x+y+z)^2\left(4\sum_{cyc}x^4+9\sum_{sym}x^3y+31\sum_{cyc}x^2yz-26\sum_{cyc}x^2y^2\right)=$$

$$=\left(\sum_{cyc}x^2+2\sum_{cyc}xy\right)\left(4\sum_{cyc}x^4+9\sum_{sym}x^3y+31\sum_{cyc}x^2yz-26\sum_{cyc}x^2y^2\right)=$$

$$=4\sum_{cyc}x^6+4\sum_{sym}x^4y^2+9\sum_{sym}x^5y+18\sum_{cyc}x^3y^3+9\sum_{sym}x^3y^2z+31\sum_{cyc}x^4yz+31\sum_{sym}x^3y^2z-$$

$$-26\sum_{sym}x^4y^2-78x^2y^2z^2+8\sum_{sym}x^5y+8\sum_{cyc}x^4yz+18\sum_{sym}x^4y^2+18\sum_{sym}x^3y^2z+36\sum_{cyc}x^4yz+$$

$$+62\sum_{sym}x^3y^2z+186x^2y^2z^2-52\sum_{cyc}x^3y^3-52\sum_{sym}x^3y^2z=$$

$$=4\sum_{cyc}x^6+17\sum_{sym}x^5y-4\sum_{sym}x^4y^2-34\sum_{cyc}x^3y^3+75\sum_{cyc}x^4yz+68\sum_{sym}x^3y^2z+108x^2y^2z^2$$

$$\sum_{cyc}7x^4yz+\sum_{sym}57x^3y^2z+366x^2y^2z^2\le$$

$$\le 4\sum_{cyc}x^6+17\sum_{sym}x^5y-4\sum_{sym}x^4y^2-34\sum_{cyc}x^3y^3+75\sum_{cyc}x^4yz+68\sum_{sym}x^3y^2z+108x^2y^2z^2$$

הערה. כנראה פחות מעניין לקרוא חישובים מאשר לעשות אותם לבד. ***טיפ לבדיקת מקדמים:*** כדאי מדי פעם לבדוק משקל (סכום המקדמים), זה מאפשר למצוא שגיאות. זה שקול מתמטית להצבה של (1,1,1), לכן משקלים בשני האגפים חייבים להיות אותו דבר.

$$258x^2y^2z^2+34\sum_{cyc}x^3y^3+4\sum_{sym}x^4y^2\le 4\sum_{cyc}x^6+17\sum_{sym}x^5y+68\sum_{cyc}x^4yz+11\sum_{sym}x^3y^2z$$

האי-שוויון מתפרק לסכום של אי-שוויונים הבאים:

(א) $34\sum_{cyc}x^3y^3\le 17\sum_{sym}x^5y$

(ב) $4\sum_{sym}x^4y^2\le 4\sum_{cyc}x^6+12x^2y^2z^2$

(ג) $270x^2y^2z^2\le 68\sum_{cyc}x^4yz+11\sum_{sym}x^3y^2z$

קל להוכיח את כל 3 האי-שוויונים האחרונים. אכן, א' הוא סכום של אי-שוויונים בסגנון $2x^3y^3\le x^5y+y^5x$, (ב) הוא אי-שוויון שור, (ג) הוא אי-שוויון הממוצעים.

הערה. בשתי השאלות האחרונות הרעיון הכללי הוא: להשתמש בשיטת השלילה בשביל להיפטר משורשים. כל היתר – טכניקה (שהיא גם חשובה).