תרגיל 18

שלילה באי-שוויונים

רעיון של שיטת השלילה באי-שוויונים הוא פשוט: במקום להוכיח ש- $a<b$ נניח כי $a\ge b$ ונגיע לסתירה. או לחלופין אם מבקשים כי $a\ge b$ גורר $c\ge d$ ננסה להוכיח כי $c<d$ גורר $a<b$ (אולי זה יותר קל?).

1. נניח כי $a^2+b^2+c^2+abc=4$ כאשר $a,b,c\ge 0$. הוכח כי $a+b+c\le 3$.

2. נתון כי $a,b,c\ge 0$ ובנוסף $a^3+b^3+c^3+5\left(ab+bc+ca\right)=18$. הוכח כי $a+b+c\le 3$.

3. נתונים n מספרים חיוביים שמקיימים $x_1x_2x_3\cdot\ldots\cdot x_n=1$. הוכח כי
$$\frac{1}{x_1+n-1}+\frac{1}{x_2+n-1}+\ldots+\frac{1}{x_n+n-1}\le 1 .$$

4*. נתון כי $a,b,c\ge 0$ ובנוסף $ab+bc+ca\ne 0$. הוכח כי
$$\sqrt{\frac{a}{b+3c}}+\sqrt{\frac{b}{c+3a}}+\sqrt{\frac{c}{a+3b}}\ge\frac{3}{2} .$$

5**. נתון כי $a,b,c\ge 0$ ובנוסף $ab+bc+ca\ne 0$. הוכח כי
$$\sqrt{1+\frac{48a}{b+c}}+\sqrt{1+\frac{48b}{a+c}}+\sqrt{1+\frac{48c}{a+b}}\ge 15 .$$