תרגיל 17

העתקות גיאומטריות

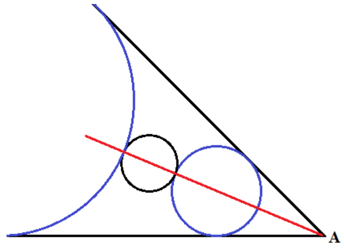
1. ABC משולש שווה שוקיים, AC = AB. נסמן את האמצע של BC ב-T.
יהי P עקב האנך מ-T לצלע AB. יהי M אמצע PT. הוכח כי PC מאונך ל-MA.

פתרון. יהי Q עקב הגובה מ-C על AB. אז PT הוא קטע אמצעים במשולש BCQ, לכן CQ הוא תיכון במשולש זה. קל לראות כי משולש TPA דומה למשולש BQC: יש להם זוויות ישרות ב-P וב- Q בהתאמה, וזוויותיהן ב-A וב-C בהתאמה משלימות את הזווית CBA ל-90 מעלות, לכן גם הם שוות. לכן סיבוב ב-90 מעלות יהפוך את המשולש TPA למשולש שכל הקטעים שלו מקבילים לקטעים המתאימים של BQC, ולכן דבר זה נכון גם לתיכונים שלהם מ-A ומ-C בהתאמה, לכן MA מאונך ל-PC (כי אחרי שנסובב אחד מהם ב-90 מעלות, הם יהיו מקבילים).

2. מעגל חסום של משולש ABC משיק לצלע BC בנקודה P, והקטע PQ הוא קוטר של המעגל. הוכח כי הישר QA, האנך האמצעי ל-BC והאנך האמצעי ל-PQ נפגשים בנקודה אחת.

פתרון. נסובב את הציור כך ש-BC יהיה אופקי ו-A מעליו. נצייר גם את מעגל החסום מבחוץ שמשיק לצלע BC מלמטה בנקודה S. אז כידוע נקודות P ו-S סימטריות יחסית לאמצע הצלע BC. לכן האנך האמצעי של BC הוא גם האנך האמצעי של PS. האנכים האמצעים של PS ושל PQ הם קטעים אמצעים במשולש ישר זווית PQS, לכן הם נחתכים באמצע של QS.
ובכן, צריך להוכיח כי AQ עובר דרך האמצע של QS, כלומר ש-A, Q, S על ישר אחד. קיימת הומותטיה שמרכזה ב-A והמקדם שלה חיובי שתעביר מעגל חסום למעגל החסום מבחוץ. אז אותה הומותטיה תעביר את הנקודה העליונה של המעגל החסום (שהיא Q) לנקודה העליונה של המעגל החסום מבחוץ (שהיא S) ולכן A, Q, S נמצאים על ישר אחד. מש"ל.

3. מעגל ω נמצא בתוך משולש ABC. מעגלים α,β,γ משיקים למעגל ω באופן חיצוני בנקודות K,L,M בהתאמה , ובנוסף נתון כי α משיק לישרים AB, AC, המעגל β משיק לישרים AB, BC, והמעגל γ משיק לישרים AC, BC. הוכח כי AK, BL, CM נפגשים בנקודה אחת.



פתרון. נניח ש-ω נתון ונסתכל על המיקומים האפשריים של α: יותר קרוב או יותר רחוק ל-A מאשר ω. אבל הקרן AK בשני המצבים תהיה באותו כיוון.

אכן, אינברסיה שמרכזה ב-A שהיא משאירה את ω במקום תעביר אשת שני הגרסאות האפשריות של α אחת לשנייה, ולכן שתי הגרסאות של K נמצאות על אותה קרן מ-A.

לכן מותר להניח ללא הגבלת הכלליות ש-α יותר קרוב ל-A מאשר ω.

הומותטיה עם מקדם שלילי שמרכזה ב-K יכולה להעביר את α ל-ω. היא תעביר גם את הישרים AB, AC לישרים מקבילים לצלעות המשולש שמשיקים ל-ω ומקבילים לצלעות המשולש, ונחתכים בנקודה U. ישרים האלה נמצאים בצד הרחוק של ω מצלעות המשולש. באופן דומה ל-U מגדירים נקודות V ו-W. אז משולש UVW דומה למשולש ABC, וצלעות מתאימות שלהם מקבילות. השלשות AKU, BKV, CKW יוצרים קווים ישרים. לכן מספיק להוכיח כי AU, BV, CW נחתכים בנקודה אחת. זה קל מאוד, הרי קיימת הומותטיה עם מקדם שלילי שמעבירה את המשולש ABC למשולש UVW.

4. נתון משולש ABC, שבו AB לא שווה ל-AC. מבצעים אינברסיה שמרכזה באמצע של צלע BC ורדיוסה הוא כזה, שמעגל החסום של ABC יעבור לעצמו.

א. לאן יעבור המעגל החסום מבחוץ לצלע BC ?

ב. לאן יעבור מעגל 9 נקודות (מעגל אוילר)?

ג. הסיקו מכאן את משפט פיירבאך: מעגל 9 נקודות משיק למעגל החסום ולכל המעגלים החסומים מבחוץ.

פתרון. א. יישאר במקום. נסמן ב-M את אמצע הצלע BC, ואת נקודות ההשקה של BC עם המעגל החסום ב-P, ועם המעגל החסום מבחוץ ב-Q. ידוע כי MQ = MP. רדיוס של אינברסיה שתשמור על מעגל חסום ומרכזה ב-M הוא MP, אבל אינברסיה כזאת תשמור גם על המעגל החסום מבחוץ.

ב. קודם כל, ברור שמעגל 9 נקודות יעבור לישר, אבל השאלה היא לאיזה ישר. לפי סעיף ג' (ועם ציור טוב) קל לנחש את התשובה: זה אחד המשיקים המשותפים של המעגל החסום ובחסום מבחוץ, ספציפית זה הישר שסימטרי ל-BC ביחס לחוצה זווית של הזווית A של המשולש. לישר זה נסמן l.

נסמן: N אמצע AC, K אמצע AB. אז מעגל 9 נקודות זה מעגל שחוסם KMN. עם רדיוס האינברסיה היה $\sqrt{MN \cdot MK}$ אז היינו מקבלים ישר שסימטרי ל-KN ביחס לחוצה הזווית של M במשולש KMN. ברור שהישר הזה מקביל לישר l. לנו יש כנראה רדיוס אחר, אבל זה לא משפיע על הכיוון של הישר.

ובכן, כבר הוכחנו כי מעגל 9 נקודות יעבור לישר שמקביל ל-l. כדי להוכיח שהוא בעצם l צריך להוכיח בנוסף שהוא עובר דרך נקודת החיתוך של l ושל חוצה הזווית, שנמצאת גם כל BC ונסמן אותה ב-F.

יהי G עקב הגובה מ-A על BC. גם G נמצא על מעגל 9 נקודות. תמונה אינברסית של מעגל 9 נקודות תחתוך את BC בנקודה האינברסית ל-G. אז צריך להוכיח (וזה

חייב להיות נכון, אם אין טעות בשאלה) שהאינברסיה שלנו מעבירה את G ל-F. כלומר ש- $\mathrm{MF}\cdot\mathrm{MG}=\mathrm{MP}^2$.

את זה לא קשה לחשב. נסמן את צלעות המשולש a, b, c (הצלעות שנמצאות מול הקודקודים עם שמות דומים), ונניח בה"כ כי $b>c$. אז:

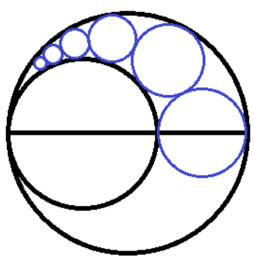
(1) $$\mathrm{MP}=\frac{b-c}{2}.$$

(2) $$\mathrm{MF}=\frac{ab}{b+c}-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\cdot\frac{b-c}{b+c}$$

(3) $$\mathrm{MG}=\frac{b^2-c^2}{2a}$$

הנוסחא (1) מתקבלת משוויון של משיקים מאותה נקודה למעגל, (2) מתכונת חוצה זווית, ו-(3) ממשפט פיתגורס. הקוראים מוזמנים לבדוק אותן. מהנוסחאות נובע בקלות כי $\mathrm{MF}\cdot\mathrm{MG}=\mathrm{MP}^2$.

ג. אינברסיה שומר על המעגל החסום ועל מעגל החסום מבחוץ ל-BC, ומעבירה את מעגל 9 נקודות למשיק משותף שלהם. לכן גם לפני האינברסיה הם היו משיקים. באופן דומה, מעגל 9 נקודות משיק גם למעגלים האחרים שחסומים מבחוץ. מכאן מתקבל משפט פיירבאך: נעגל 9 נקודות נשיק למעגל חסום וגם למעגלים החסומים מבחוץ (בתנאי שסיימת את החישוב בסעיף ב'). כמובן, יש ההוכחה שהראנו תקפה רק במקרה ש- $b\neq c$, אבל במקרה של משולש שווה-שוקיים זה ברור: כל 3 המעגלים עוברים דרך אמצע הצלע M ומשיקים לצלע ב-M.



5. מעגל α,β משיקים זה לזה באופן פנימי. מעגל γ_0 משיק לאחד מהם באופן פנימי ולשני באופן חיצוני, ומרכזיהם של כל 3 המעגלים הנ"ל נמצאים על ישר אחד (נקרא לו "הקוטר המשותף"). בונים סדרה אינסופית של מעגלים שונים, בצורה שהמעגל γ_{n+1} משיק בו-זמנית למעגלים α,β,γ_n (ראה ציור).

את הרדיוס של γ_n נסמן ב-r_n, ואת המרחק ממרכז של γ_n לקוטר המשותף של שלוש המעגלים שמהם התחלנו נסמן ב-y_n. חשב את $\frac{r_n}{y_n}$.

פתרון. נעשה אינברסיה עם מרכז בנקודת ההשקה של α,β. אז המעגלים α,β יעברו לישרים מקבילים, והמעגלים γ_n יהיו באותו גודל בעמודה אחת. אז אחרי האינברסיה נראה כי $\frac{r_n}{y_n}=\frac{1}{2n}$. אותו דבר היה נכון לפני האינברסיה, כי כל מעגל הומותטי למעגל האינברסי שלו, והומותטיה תגדיל את r_n ואת y_n פי אותו מספר.