תרגיל 17

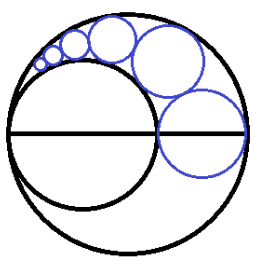
העתקות גיאומטריות

1. ABC משולש שווה שוקיים, AB = AC. נסמן את האמצע של BC ב-T.
יהי P עקב האנך מ-T לצלע AB. יהי M אמצע PT. הוכח כי PC מאונך ל-MA.

2. מעגל חסום של משולש ABC משיק לצלע BC בנקודה P, והקטע PQ הוא קוטר של המעגל. הוכח כי הישר QA, האנך האמצעי ל-BC והאנך האמצעי ל-PQ נפגשים בנקודה אחת.

3. מעגל ω נמצא בתוך משולש ABC. מעגלים α,β,γ משיקים למעגל ω באופן חיצוני בנקודות K,L,M בהתאמה , ובנוסף נתון כי α משיק לישרים AB, AC, המעגל β משיק לישרים AB, BC, והמעגל γ משיק לישרים AC, BC. הוכח כי AK, BL, CM נפגשים בנקודה אחת.

4. נתון משולש ABC, שבו AB לא שווה ל-AC. מבצעים אינברסיה שמרכזה באמצע של צלע BC ורדיוסה הוא כזה, שמעגל החסום של ABC יעבור לעצמו.
א. לאן יעבור המעגל החסום מבחוץ לצלע BC ?
ב. לאן יעבור מעגל 9 נקודות (מעגל אוילר)?
ג. הסיקו מכאן את משפט פיירבאך: מעגל 9 נקודות משיק למעגל החסום ולכל המעגלים החסומים מבחוץ.



5. מעגל α,β משיקים זה לזה באופן פנימי. מעגל γ_0 משיק לאחד מהם באופן פנימי ולשני באופן חיצוני, ומרכזיהם של כל 3 המעגלים הנ"ל נמצאים על ישר אחד (נקרא לו "הקוטר המשותף"). בונים סדרה אינסופית של מעגלים שונים, בצורה שהמעגל γ_{n+1} משיק בו-זמנית למעגלים α,β,γ_n (ראה ציור).

את הרדיוס של γ_n נסמן ב-r_n, ואת המרחק ממרכז של γ_n לקוטר המשותף של שלוש המעגלים שמהם התחלנו נסמן ב-y_n. חשב את $\frac{r_n}{y_n}$.