תרגיל 16

חצי-אינווריאנטים ושיטת הקיצוני

1. נתון מצולע קמור בעל N צלעות, ובתוכו נבחרו N נקודות. הוכח שניתן למצוא זיווג בין הנקודות לצלעות של המצולע, כך שמתקיים התנאי הבא: כאשר מסתכלים על הקמור של כל נקודה שנבחרה עם הצלע שמתאים לה, מקבלים N משולשים זרים (כאלה שאין להם נקודות פנימיות משותפות).

פתרון. פונקצית האנרגיה היא מכפלת השטחים של המשולשים.

טענה. נניח כי P ו-Q נקודות, a ו-b צלעות והמרחקים מנקודות P, Q לישר של הצלע a הם p_1, q_1 התאמה, ולישר של הצלע b הם p_2, q_2 בהתאמה. אם לקמור של P ו-a ולקמור של Q ו-b יש נקודה פנימית משותפת R, אז $p_1q_2 > p_2q_1$.

הקורא מתבקש לתת הוכחה מתמטית מלאה לטענה הזאת בעצמו.

כאשר נכפיל את שני האגפים של האי-שוויון האחרון ב-$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}$, נקבל שבמצב שבו יש חיתוך אפשר להקטין את מכפלת השטחים.

מכאן אפשר לסיים את הפתרון בשתי דרכים:

(1) חצי-אינווריאנט: נעשה החלפות כל עוד יש חיתוכים, ובכל צעד מכפלת השטחים תרד. אפשר להוריד רק מספר סופי של פעמים, כי יש רק מספר סופי של זיווגים, ולכן מתישהו התהליך יסתיים וכבר לא יהיו חיתוכים.

(2) שיטת הקיצוני: ניקח את הזיווג שבו מכפלת השטחים מינימלית. בזיווג הזה אין חיתוכים (הרי אילו היו, אז היה זיווג אם אנרגיה קטנה יותר).

הערה. לשאלה יש גם גרסה "הפוכה" שהיא קצת יותר מעניינת: להוכיח שיש זיווג בין נקודות לצלעות כך, שמשולשי הקמור מכסות את המצולע.

2. נתונה קבוצה סופית של נקודות, שלא כולן על ישר אחד. הוכח כי יש ישר שמכיל בדיוק שתי נקודות מהקבוצה.

הערה. זאת שאלה מפורסמת, ואפילו יש לה שם – בעיית Sylvester (על שם מתמטיקאי יהודי בריטי ממאה 19).

פתרון. פונקצית אנרגיה – גובה של משולש. נתבונן במשולש ABC בעל גובה מינימלי מקודקוד C (מבין כל הגבהים של כל המשולשים שיש לנו). הטענה היא שעל הישר AB אין נקודה נוספת D.

אם יש, אז שניים מהנקודות A, B, D (נקרא להם X ו-Y) נמצאים באותו צד של הגובה מ-C. במשולש CXY הגובה מ-C אמור להיות מינימלי, כלומר הצלע XY אמור להיות מקסימלי, אבל זה לא נכון: במשולש זווית X או Y היא לא חדה, ומולה נמצאת הצלע הגדולה כלומר גם ממנה יורד הגובה הקצר. סתירה.

3*. במדינה מסוימת יש שתי מפלגות, ואוסף של אנשים שכל אחד מהם תומך במפלגה אחת. פעם בשנה יש בחירות. אחרי הבחירות כל בן אדם מברר במי בחרו חברים שלו ובשנה הבאה יבחר לפי הרוב (אם חל שוויון אז איש לא מחליף דעתו). הוכח שאחרי זמן מסוים כל בן אדם תמיד יבחר אותה מפלגה שבחר לפני שנתיים.

פתרון. המצב הוא זוג של הצבעות עוקבות: של שנה מסוימת ושנה שלפניה, ופונקצית האנרגיה היא כמות של אי-הסכמות בין הצבעה של אזרח כלשהו בשנה החדשה להצבעה של חבר שלו בשנה הקודמת פלוס ε כפול כמות האזרחים ששינו את ההצבעה שלהם מהפעם הקודמת (כאשר ε זה מספר קטן מאוד: קטן מאחד חלקי מאה פעמיים כמות האנשים בריבוע).
נסתכל על כמות האי-הסכמות של חברים של אזרח מסוים לפני שנה מול הדעה שלו גם לפני שנתיים וגם עכשיו. ברור שעכשיו זה פחות או אותו דבר. כאשר מסכמים את המספרים האלה, מקבלים שהחלק השלם של פונקצית האנרגיה יכולה רק לרדת מפעם לפעם. אם החלק השלם יורד, אז לא משנה מה מתרחש עם החלק השבור.
אם החלק השלם נשמר, זה אומר שכל פעם שדעה של בן אדם משתנה יחסית לדעה שלו לפני שנה, אז היא משתנה מהסיבה שהיא נשארת כמו הדעה שלו לפני שנה, כלומר במקרה הזה החלק השבור יורד משנה לשנה. ובכן, בכל מקרה אם משהו משתנה לאומת המצב של לפני שנתיים, אז האנרגיה יורדת. אבל יש רק מספר סופי של מצבי הצבעה בשנתיים רצופות (וזה 4 בחזקת כמות האנשים) לכן אחרי פחות מ-4 בחזקת האוכלוסייה שנים המדינה תיכנס למעגלים של שנתיים.

4.* נתון לוח גיר. בהתחלה לוח נקי. אפשר לעשות פעולות משני סוגים:
(א) לרשום שני אחדים.
(ב) אם רשומים על הלוח שני מספרים שווים, אז אפשר להגדיל אחד מהם ב-1 ואת השני להקטין ב-1.
כמה פעולות צריך לעשות כדי שיופיע על הלוח מספר 5771?

הערה. השאלה הזאת הגיע מתחרות הערים תשס"ו. במקור היה 2005 ולא 5771.
להלן הפתרון עבור 2005 שכתבנו אז (יש בה פונקצית אנרגיה, אבל צריך עוד משהו.) הקוראים מוזמנים לשכלל את זה ל-5771 בעצמם.

תשובה: $\dfrac{2005^2+2003^2+2002^2+\ldots+1^2+1^2}{2} = 1342355520$

פתרון. נבנה פונקצית "אנרגיה" שהיא סכום ריבועי המספרים שרשומים על הלוח. כאשר רושמים על הלוח שני אחדים אז האנרגיה עולה ב-2. כאשר רושמים N+1 ו- N-1 במקום שני פעמים N אז יש החלפנו $2N^2$ ב-

$(N+1)^2 + (N-1)^2 = 2N^2+2$ כלומר אנרגיה שוב עולה ב-2.

לכן בכל מהלך "אנרגיה" עולה ב-2.

אנחנו נפעל בשיטה כזאת. אם יש לנו על הלוח פעמים או שלוש פעמים 1, ופעם אחד בדיוק כל מספר מ-2 עד N, אז אנחנו נהפוך 1 ו-1 ל-0 ו-2, ואז יהיה פעמים 2 שנהפוך אותו ל-1 ו-3, ואז יהיה פעמים 3 ונהפוך אותו ל-2 ו-4, וכן הלאה, עד שנהפוך פעמים N ל-N+1 ו- N-1.

ואז ייווצר מצב שיש כל מספר מ-2 עד N+1 פעם אחד בדיוק חוץ ממספר N שהוא חסר. אם יש פחות משני אחדים, אז נוסיף עוד שני אחדים. כעת נעשה סדרת פעולות דומה, כך שבמקום כל המספרים מ-2 עד N-1 יהיו מספרים מ-2 עד N ורק N-1 יהיה חסר. אז בעצם יהיו מספרים מ-2 עד N+1 חוץ פעם אחד בדיוק חוץ ממספר N-1 שהוא חסר.

כך נבצע עוד כמה סדרות של פעולות ואחרי כל סדרה החור יזוז ב-1 ואז אחרי N סדרות של פעולות יהיו לנו את כל המספרים מ-2 עד N+1 פעם 1 בדיוק, ומספר 1 יפיע פעם או פעמיים.

נחזור על כל הסיפור עד שיהיו לנו את כל המספרים מ-2 עד 2004 פעם 1 בדיוק. אחרי זה נבצע עוד סדרה של פעולות ואז יהיו לנו כל המספרים מ-2 ועד 2003 וגם 2005 פעם אחד בדיוק, ויהיה לנו 1 פעם או פעמיים (והרבה אפסים). משיקולי אנרגיה ברור ש1 יופיע פעמים, כי אנרגיה תמיד זוגית, לכן כמות של מספרים אי-זוגיים היא זוגית).

אנחנו יכולים לחשב ישירות כמה מהלכים עשינו אבל זה ייקח הרבה זמן. אבל, משיקולי אנרגיה, כמות המהלכים שעשינו שווה לחצי מסכום הריבועים, כלומר $\frac{2005^2+2003^2+2002^2+\ldots+3^2+2^2+1^2+1^2}{2}$. קל לחשב את זה לפי נוסחא ידועה לסכום הריבועים: $1^2+2^2+3^2+\ldots+N^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

כמובן יש שיטות אחרות להגיע למספר 2005. אם נשתמש בשיטה אחרת, שמגיע לאותו מצב (אותם מספרים שונים מאפס רשומים על הלוח) אז ברור שהיא נותנת אותו מספר של מהלכים.

ברור שכאשר יוצרים מספר 2005 אז יוצרים גם מספר 2003. אנחנו נוכיח, שכל מספר מ-1 ועד 2002 מופיע לפחות פעם אחד אם השתמשנו במספר הקטן ביותר של מהלכים.

נניח שמספר מסוים N (חיובי וקטן מ-2003) לא מופיע על הלוח. ברור שפעם מספר N היה על הלוח. באיזשהו רגע הוא נמחק, ולא מופיע יותר על הלוח.

כאשר הוא נמחק, הופיעו מספרים N+1 ו- N-1. המספרים באלה אף פעם לא נוצלו, כי אם היו מנצלים אחד מהם אז היה מופיע שוב מספר N, והרי הנחנו שהוא נמחק ולא הופיע יותר.

ובכן, המהלך של מחיקה של מספק Nהיה מיותר לגמרי. היינו יכולים לא לבצע אותו ולחסוך מהלך. כלומר, אם מספר N חסר בסוף המשחק, אז לא עשינו מספר הכי קטן של מהלכים. אז כאשר עשינו מספר הכי קטו של מהלכים אז האנרגיה היא לפחות $1^2+2^2+3^2+...+2002^2+2003^2+2005^2$ וצריך להוסיף לפחות עוד 1 כי זה מספר אי-זוגי ואנרגיה תמיד זוגית. לכן השיטה שתאנו נותנת את האנרגיה ואת כמות המהלכים הקטנים ביותר.

הערה. מצאנו גם פתרונות אחרים לבעיה, אבל זה כנראה הכי אלגנטי.

למרות שפיסיקאים כנראה היו מחלקים את האנרגיה ב-2 :-).

5. במעגל רשומים N מספרים שסכומם חיובי. אפשר לעשות פעולות מהסוג הבא לקחת מספר שלילי, להוסיף אותו לשני מספרים הסמוכים ולאחר מכן לשנות סימנו לחיובי. (במילים אחרות אם היו רשומים ברצף A, B, C ואם B היה שלילי אז אפשר להפוך את הרצף הזה לרצף A+B , –B, C+B). השחקן בוחר את המספר השלילי איך שבא לו, ועוצר רק כאשר לא נשארו עוד מספרים שליליים במעגל.
א. הוכח שהתהליך יסתיים אחרי מספר סופי של צעדים, במקרה שהמספרים במעגל שלמים.
ב*. הוכח שהתהליך יסתיים אחרי מספר סופי של צעדים בכל מקרה
ג**. הוכח שכמות הצעדים לא תלויה בהחלטות של השחקן.

פתרון. נסתכל על **הסכומים החלקיים בכל הקשתות**, בגודל כלשהו החל מ-1 (חוץ מקבוצה ריקה וממעגל שלם). נתבונן על קבוצת המספרים הזאת.
נקודת התחלה או סיום של קשת יכולה להיות בנקודה בין A ל-B, או בין B ל-C, או בכל נקודה אחרת. בשתי המקרים הראשונים נגיד שהקשת מתחילה או נגמרת **בנקודה עדינה** (כלומר יש שתי נקודו עדינות).
אם שתי נקודות הקצה של הקשת הן לא נקודות עדינות אז הסכום בקשת לא משתנה.
קשתות שבהן אחת היא נקודה מתחלקות לזוגות, שבהן קצה אחד הוא אותו דבר, והקצה שהוא נקודה עדינה שונה. קשתות שיוצרות זוג מתחלפות בסכומים שלהן:
אכן, למשל קשת מסתיימת בין A ל-B - הסכום שלה משתנה מ-A+X ל-A+B+X
והקשת שמסתיימת בין B ל-C – הסכום שלה משתנה מ-A+B+X ל-A+X. דבר דומה מתרחש גם אם הקשתות שמתחילות בנקודות עדינות ומסתיימות בנקודות

אחרות. לכן קבוצת הסכומים החלקיים נשארת אותו דבר חוץ משתי קשתות: קשתות שמתחילות וגם מסתיימות בנקודות עדינות.

בשביל להבין מה קורה אם שתי הקשתות הללו נסמן ב-S את הסכום של כל המספרים במעגל (שהוא נשמר וחיובי). סכומים החלקיים בשתי הקשתות המעניינות היו $S - B$, B, ואחרי המהלך הם $-B$, $S + B$.

לפני המהלך: B שלילי ולכן $S - B$ חיובי. אחרי המהלך: $-B$ חיובי, $S + B$ יכול להיות שלילי או חיובי או 0. ובכן, אפשר לתאר כך את מה שקורה לסכומים החלקיים השליליים בקשתות: רק אחד מהם משתנה, והוא הופך מ-B ל- $S + B$. חוץ מזה, הסכומים מחליפים תפקידים.

ובכן נסתכל על אוסף של הסכומים החלקיים השליליים בקשתות $\{S_1, S_2, \dots , S_k\}$. אם האוסף עושים את הפעולה הבאה: בכל מהלך לוקחים מספר אחד ומגדילים אותו ב-S (כאשר S הוא מספר חיובי קבוע, שהוא בעצם גם הסכום של כל המספרים בשאלה המקורית). אם מספר מסוים מפסיק להיות שלילי, אנחנו מפסיקים להתייחס אליו וזורקים אותו מהאוסף. במשחק הזה ברור שכמות הצעדים סופית וברור גם מה הכמות הזאת: זאת בדיוק כמות הצעדים שצריך כדי באמצעות הוספות של S להוציא את כל ה- S_i מהתחום השלילי, וזה $\sum_{i=1}^{k}\left\lceil \frac{-S_i}{S} \right\rceil$.

הערה. אפשר להגיד ש- $S_1 + S_2 + \dots + S_k$ זאת פונקציה אנרגיה שתמיד עולה, וזה כבר יפתור את השאלה עבור מספרים שלמים (אבל לא למספרים ממשיים כי כאשר יש אינסוף מצבים, אפשר להעלות את האנרגיה אינסוף פעמים). אבל פה יותר נוח להסתכל לא על פונקציה עם ערך מספרי, אלה על פונקציה שערכה קבוצה של מספרים שליליים, ואז הכול הרבה יותר ברור.