

תרגיל 16

חצי-אינווריאנטים ושיטת הקיצוני

1. נתון מצולע קמור בעל N צלעות, ובתוכו נבחרו N נקודות. הוכח שניתן למצוא זיווג בין הנקודות לצלעות של המצולע, כך שמתקיים התנאי הבא: כאשר מסתכלים על הקמור של כל נקודה שנבחרה עם הצלע שמתאים לה, מקבלים N משולשים זרים (כאלה שאין להם נקודות פנימיות משותפות).

2. נתונה קבוצה סופית של נקודות, שלא כולן על ישר אחד. הוכח כי יש ישר שמכיל בדיוק שתי נקודות מהקבוצה.

3.* במדינה מסוימת יש שתי מפלגות, ואוסף של אנשים שכל אחד מהם תומך במפלגה אחת. פעם בשנה יש בחירות. אחרי הבחירות כל בן אדם מברר במי בחרו חברים שלו ובשנה הבאה יבחר לפי הרוב (אם חל שוויון אז איש לא מחליף דעתו). הוכח שאחרי זמן מסוים כל בן אדם תמיד יבחר אותה מפלגה שבחר לפני שנתיים.

4.* נתון לוח גיר. בהתחלה לוח נקי. אפשר לעשות פעולות משני סוגים:

(א) לרשום שני אחדים.

(ב) אם רשומים על הלוח שני מספרים שווים, אז אפשר להגדיל אחד מהם ב-1 ואת השני להקטין ב-1.

כמה פעולות צריך לעשות כדי שיופיע על הלוח מספר 5771?

5. במעגל רשומים N מספרים שסכומם חיובי. אפשר לעשות פעולות מהסוג הבא לקחת מספר שלילי, להוסיף אותו לשני מספרים הסמוכים ולאחר מכן לשנות סימנו לחיובי. (במילים אחרות אם היו רשומים ברצף A, B, C ואם B היה שלילי אז אפשר להפוך את הרצף הזה לרצף $A+B, -B, C+B$). השחקן בוחר את המספר השלילי איך שבא לו, ועוצר רק כאשר לא נשארו עוד מספרים שליליים במעגל. א. הוכח שהתהליך יסתיים אחרי מספר סופי של צעדים, במקרה שהמספרים במעגל שלמים.

ב.* הוכח שהתהליך יסתיים אחרי מספר סופי של צעדים בכל מקרה

ג.** הוכח שכמות הצעדים לא תלויה בהחלטות של השחקן.