תרגיל 15

פולינומים

1. פולינום שכל מקדמיו שלמים מקבל את הערך 8 בנקודה מסוימת. מהו המספר הגדול ביותר של נקודות שלמות שונות שבהן הוא יכול לקבל את הערך 5 ?

פתרון. כמובן צריך לציין בניסוח "בנקודה **שלמה** מסוימת", אחרת זה חסר משמעות.
ובכן, מה שאנחנו יודעים על פולינומים במקדמים שלמים, $p(x) - p(y)$ מתחלק ב- $x - y$,
לכן אם $p(x) = 8$, וגם $p(y) = 5$, אז $x - y$ יכול להיות רק ± 1 או ± 3. לכן אם בנקודה שלמה x_0 מסוימת הערך הוא 8, אז יש לכל היותר 4 נקודות שלמות עם ערך 5.

לא קשה לבנות פולינום שמקבל ערך 5 שלוש פעמים: $p(x) = 5 + (x-1)(x+1)(x-3)$.
אכן, בדוגמא זאת $p(1) = p(-1) = p(3) = 5$, ובנוסף $p(0) = 8$.

2. א. הוכח שהביטויים $\dfrac{\sin(nx)}{\sin x}$ וגם $\cos(nx)$ הם פולינומים ב- $\cos(x)$.

הערה. לפולינומים האלה קוראים הפולינומים של צ'בישוב.

ב. חשב את $\tan^2\left(\dfrac{\pi}{9}\right) + \tan^2\left(\dfrac{2\pi}{9}\right) + \tan^2\left(\dfrac{4\pi}{9}\right)$.

פתרון. א. אפשר למשל באינדוקציה. בסיס האינדוקציה עבור $n = 1$ ברור. נניח שעבור n מסוים הוכחנו כי $\cos(nx) = p(\cos x)$, $\dfrac{\sin(nx)}{\sin x} = q(\cos x)$, כאשר p, q פולינום מדרגות n, $n-1$ בהתאמה, מקדמים המובילים שלהם חיובים וכל המקדמים שלמים.

$$\cos((n+1)x) = \cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x = p(\cos x)\cdot\cos x - q(\cos x)\cdot\sin^2 x =$$
$$= p(\cos x)\cdot\cos x + q(\cos x)\cdot(\cos^2 x - 1)$$

זה פולינום מדרגה $n + 1$ בקוסינוס, עם מקדמים שלמים ומקדם המוביל – חיובי.

$$\frac{\sin((n+1)x)}{\sin x} = \frac{\sin x\cos(nx) + \cos x\sin(nx)}{\sin x} = \cos(nx) + \cos x\frac{\sin(nx)}{\sin x} = p(x) + q(x)\cos x$$

וזה פולינום מדרגה n בקוסינוס, עם מקדמים שלמים ומקדם המוביל – חיובי. מש"ל.

ב. הרעיון של פתרון: נתבונן ב- $\dfrac{\sin(9x)}{\sin x}$ בתור פולינום ב-$c = \cos(x)$. השורשים של הפולינום הם: $\pm\cos\dfrac{\pi}{9}, \pm\cos\dfrac{2\pi}{9}, \pm\cos\dfrac{3\pi}{9}, \pm\cos\dfrac{4\pi}{9}$. זה כל השורשים שיש (יש כאן כבר שורשים שונים, והדרגה 8). אם נחשב את הפולינום, אז לפי משפט וייטא נדע את כל הביטויים הסימטריים בשורשים (אפילו אם לא נדע ישר את השורשים עצמם).
הקורא מוזמן לנסות לבצע את החישוב לבד (או חלקים ממנו אם החישוב לא יוצא).

נסמן $q_n(\cos x)=\dfrac{\sin(3x)}{\sin x}$. נתחיל מדבר פשוט: נחשב q_3

$$q_3=\frac{\sin(3x)}{\sin x}=\frac{\sin(2x)\cos x+\cos(2x)\sin x}{\sin x}=2c^2+\left(2c^2-1\right)=4c^2-1 .$$

השורשים שלו $\pm\cos\dfrac{\pi}{3}=\pm\dfrac{1}{2}$, והם גם שורשים של q_9. בעצם, אלה שני השורשים של q_9 שלא מעניינים אותנו בשאלה הזאת, לכן אנחנו נחשב את $\dfrac{q_9(c)}{q_3(c)}=\dfrac{\sin(9x)}{\sin(3x)}$, שהוא פולינום מדרגה שישית ושורשיו $\pm\cos\dfrac{\pi}{9},\pm\cos\dfrac{2\pi}{9},\pm\cos\dfrac{4\pi}{9}$.

קל לראות כי

$$\begin{aligned}&\cos(3x)=\cos(2x)\cos x-\sin(2x)\sin x=\left(2c^2-1\right)c-2c\cdot\sin^2 x=\\&=\left(2c^2-1\right)c+2c\cdot\left(c^2-1\right)=4c^3-3c\end{aligned}$$

ולכן

$$\frac{q_9(c)}{q_3(c)}=\frac{\sin(9x)}{\sin(3x)}=q_3(\cos 3x)=q_3\left(4c^3-3c\right)=4\left(4c^3-3c\right)^2-1=64c^6-96c^4+36c^2-1$$

הפולינום יצא זוגי, וזה לא מפתיע: השורשים שלו סימטריים ביחס ל-0. לכן על הפולינום $64z^3-96z^2+36z-1$ אפשר להגיד שהשורשים שלו הם:

$$z_1=\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)^2\quad,\quad z_2=\left(\cos\frac{2\pi}{9}\right)^2\quad,\quad z_3=\left(\cos\frac{4\pi}{9}\right)^2$$

אז גם אם אנחנו לא יודעים את z_1,z_2,z_3 אנחנו בכל זאת יודעים את הביטויים הסימטריים שלהם לפי וייטא. למשל מה שביקשו בשאלה זה

$$\begin{aligned}&\tan^2\left(\frac{\pi}{9}\right)+\tan^2\left(\frac{2\pi}{9}\right)+\tan^2\left(\frac{4\pi}{9}\right)=\frac{1}{z_1}-1+\frac{1}{z_2}-1+\frac{1}{z_3}-1=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}-3=\\&=\frac{z_1z_2+z_3z_1+z_2z_3}{z_1z_2z_3}-3=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}-3=\frac{36/64}{1/64}-3=36-3=33\end{aligned}$$

3. יהי p פולינום שמקבל רק ערכים אי-שליליים על הציר הממשי. הוכח כי הוא ניתן לכתיבה כסכום של שני ריבועים של פולינומים.

פתרון. קל לראות שהמקדמים של p ממשיים. אכן, קיים תהליך אלגברי פשוט שמאפשר לחשב את המקדמים של פולינום מדרגה n לפי הערכים שלו ב-$n+1$ נקודות שונות. אם הקלט של התהליך הזה ממשי, אז גם הפלט שלו יהיה ממשי, ויש לנו ערכים ממשיים באינסוף נקודות ממשיות.

כעת נתבונן בשורשים של פולינום. אפשר להגיד שתי דברים:

א. כל שורש ממשי מופיע עם ריבוי זוגי. אכן, פונקציה מחליפה סימן בכל שורש עם ריבוי אי-זוגי, ולכן לפולינום בעל ערכים אי-שליליים אין שורש עם ריבוי אי-זוגי.

ב. לכל שורש לא ממשי, גם הצמוד המרוכב שלו הוא שורש, ויש לו את אותו הריבוי. אכן, אם נצמיד את הפולינום, נקבל פולינום שהשורשים שלו הם צמודים לשורשי הפולינום המקורי. אבל זה אותו פולינום.

ובכן, אפשר לחלק את כל השורשים של הפולינום (ממשיים ואחרים) לזוגות של מספרים מרוכבים צמודים. לכן את הפולינום אפשר לרשום כך:

$$p(x)=a\prod_{j=1}^{n}\left(x-x_j\right)=a\prod_{j=1}^{n/2}\left(\left(x-x_j\right)\left(x-\overline{x_j}\right)\right)$$

כאשר x_j שורשיו, ו-a הוא המקדם המוביל שלו. נתבונן בפולינום $s(x)=\sqrt{a}\prod_{j=1}^{n/2}\left(x-x_j\right)$.

זה פולינום בעל מקדמים מרוכבים, ואפשר לרשום: $s(x)=q(x)+i\cdot r(x)$, כאשר q, r הם פולינומים עם מקדמים ממשיים. אזי

$$p(x)=s(x)\cdot\bar{s}(x)=\left(q(x)+ir(x)\right)\cdot\left(q(x)-ir(x)\right)=\left(q(x)\right)^2+\left(r(x)\right)^2$$

ובכן, $p=q^2+r^2$ מש"ל.

4. יהי p פולינום עם מקדמים שלמים שדרגתו $n>1$. הוכח כי ל-$p(p(p(\ldots p(x)\ldots)))$ יש לא יותר מאשר n נקודות שבת שלמות.

הערה. שאלה זאת (למרות שהיא פשוטה מאוד) הייתה ב-IMO.

פתרון. כל מה שצריך לדעת זה שלכל פולינום עם מקדמים שלמים $p(x)-p(y)$ מתחלק ב- $x-y$. אז המרחק בין $p(x)$ לבין $p(y)$ חייב להיות גדול או שווה למרחק x לבין y.
נסתכל על מרחקים בין x ל-y, בין $p(x)$ ל-$p(y)$, בין $p(p(x))$ ל-$p(p(y))$, וכו'... ,
כאשר x, y הן נקודות שבת של $p(p(p(\ldots p(x)\ldots)))$.
המרחק חוזר בשלב מסוים לערך המקורי שלו. לכן הוא לא יכול להתאפס באף שלב של התהליך. לכן המרחק בכל שלב גדול או שווה למרחק בשלב הקודם. לכן המרחק בכל שלב שווה למרחק בשלב הקודם (הרי אם המרחק יעלה אפילו פעם אחד אז הוא כבר לא יוכל לחזור לערך המקורי). מסקנה: לכל שני נקודות שבת שלמות המרחק בין $p(x)$ לבין $p(y)$ שווה למרחק בין x ל-y.
מכאן קל להבין כי קיימת העתקה שומרת מרחקים על הישר הממשי שמעבירה נקודות שבת $x_1, x_2, \ldots, x_k$ של $p(p(p(\ldots p(x)\ldots)))$ לנקודות $p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_k)$. כל תנועה של ישר מתוארת על ידי פונקציה ליניארית $l(x)=ax+b$. לכן כל נקודות השוות של $p(p(p(\ldots p(x)\ldots)))$ מקיימות משווה $p(x)=l(x)$. לכן כולן – שורשים של פולינום $p-l$, זהו פולינום מדרגה n ויש לו לא יותר מאשר n שורשים.

5. יהיו $x_1<x_2<x_3$, ו- $y_1<y_2<y_3$ המקיימים:

$$x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2$$

וכן מתקיים כי $y_1 < x_1$. מה יותר גדול: y_3 או x_3 ?

פתרון. נסמן $x_1+x_2+x_3=a \quad , \quad x_1^2+x_2^2+x_3^2=b$. נתבונן בפולינום

$$p_1(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

לפי משפט וייטא, המקדם הריבועי שלו הוא $-a$, והמקדם הליניארי הוא $\frac{a^2-b}{2}$.

אותו דבר נכון לגבי $p_2(x)=(x-y_1)(x-y_2)(x-y_3)$.

לכן $p_1(x)=p_2(x)$ + קבוע.

לפולינום מדרגה שלישית יש לכל היותר 3 תחומי מונוטוניות. יכול להיות שהוא אפילו מונוטוני, אבל אז יש לו רק שורש אחד. אם המקדם המוביל חיובי (כמו אצלנו) אז בהתחלה הוא עולה, אחר כך יורד, ובסוף שוב עולה.

x_1, x_2, x_3 הם פתרונות של $p_1(x)=0$ והם שייכים לתחומי מונוטוניות שונים. y_1, y_2, y_3 הם פתרונות של $p_1(x)=k$ והם גם שייכים לתחומי מונוטוניות שונים.

אם k חיובי אז $x_1<y_1<y_2<x_2<x_3<y_3$. אם k שלילי אז $y_1<x_1<x_2<y_2<y_3<x_3$.

לפי הנתון, אנחנו נמצאים במקרה האחרון, לכן $y_3<x_3$.

6*. K היא על ההיפרבולה $xy=1$. המעגל שמרכזו K- (מינוס K) חותך את ההיפרבולה ב-4 נקודות: A, B, C, K. הוכח כי ABC משולש שווה צלעות.

פתרון. נניח ש-(u,v) הן קואורדינאטות של K. משוואת המעגל היא:

$$(x+u)^2+(y+v)^2=R^2$$

משוואת ההיפרבולה היא $xy=1$. נקודות החיתוך הם פתרונות של שני המשוואות.

אם נציב את $y=1/x$ במשוואה הראשונה נקבל:

$$x^2+2ux+k+\frac{1}{x^2}+\frac{2v}{x}=0$$

נכפיל ב-x^2 ונקבל פולינום ממעלה רביעית: $x^4+2ux^3+\ldots=0$. לכן לפי משפט וייטא, סכום השורשים יוצא $-2u$. השורשים הם הקואורדינאטות ה-x של A, B, C, K זה

$$x_A+x_B+x_c+u=-2u$$

במילים אחרות $x_A+x_B+x_c=-3u$ כלומר $\frac{x_A+x_B+x_c}{3}=-u$. באופן דומה אפשר להוכיח כי $\frac{y_A+y_B+y_c}{3}=-v$. במילים אחרות, מרכז כובד של משולש ABC מתלכד אם מרכז המעגל החוסם שלו. לכן התיכונים של המשולש מתלכדים עם האנכים האמצעים שלו, כלומר ABC – שווה צלעות.