

תרגיל 15

פולינומים

1. פולינום שכל מקדמיו שלמים מקבל את הערך 8 בנקודה מסוימת. מהו המספר הגדול ביותר של נקודות שלמות שונות שבהן הוא יכול לקבל את הערך 5?

2. א. הוכח שהביטויים $\frac{\sin(nx)}{\sin x}$ וגם $\cos(nx)$ הם פולינומים ב- $\cos(x)$.

ב. חשב את $\tan^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \tan^2\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \tan^2\left(\frac{4\pi}{9}\right)$.

3. יהי p פולינום שמקבל רק ערכים אי-שליליים על הציר הממשי. הוכח כי הוא ניתן לכתיבה כסכום של שני ריבועים של פולינומים.

4. יהי p פולינום עם מקדמים שלמים שדרגתו $n > 1$. הוכח כי ל- $p(p(p(\dots p(x)\dots)))$ יש לא יותר מאשר n נקודות שבת שלמות.

5. יהיו $x_1 < x_2 < x_3$, $y_1 < y_2 < y_3$ המקיימים:

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

וכן מתקיים כי $y_1 < x_1$. מה יותר גדול: x_3 או y_3 ?

6.* K היא על ההיפרבולה $xy = 1$. המעגל שמרכזו K (מינוס K) חותך את ההיפרבולה ב-4 נקודות: A, B, C, K . הוכח כי ABC משולש שווה צלעות.

חג שמח!