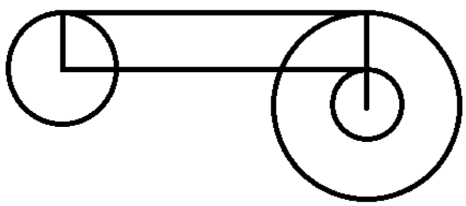
תרגיל 14

בניות גיאומטריות

1. א. לבנות משיק למעגל מנקודה נתונה.
ב. לבנות משיק משותף לשני מעגלים.

פתרון. א. לוקחים את הקטע שמחבר את הנקודה למרכז של מעגל, ובונים כליו עיגול שזה הקוטר שלו. (כמובן, יש כאן הנחה סמויה שאנחנו כבר יודעים למצוא את מרכז המעגל ואת אמצע הקטע, אבל אלה בניות ידועות ומי שלא זוכר מוזמן לשחזר אותן).
ב. אפשר להסיק את הפתרון מסעיף א' – השאלה שקולה להעברת משיק מהמרכז של המעגל הראשון למעגל שמרכזו במעגל השני ורדיוסו שווה לסכום או הפרש של הרדיוסים של שני המעגלים.



2. להעביר ישר דרך נקודה נתונה A כך שסכום המרחקים מהישר לנקודות נתונות B, C יהיה מקסימלי.

פתרון. אם הישר עובר בין B ל-C, אז סכום המרחקים שווה להיטל של הקטע BC לישר שמאונך, לכן הערך המקסימלי של זה שווה לאורך של BC, וזה יקרה כאשר הישר מאונך ל-BC. אם הישר לא בין B ל-C אז אפשר להחליף את B בנקודה D שסימטרית ל-B ביחס ל-A. כמובן, שכדאי לעשות זאת רק אם זווית BAC חדה, אז המרחק מ-C יגדל.

3. נתונים 3 ישרים מקבילים. לבנות ריבוע ש-3 קודקודיו על ישרים שונים.

פתרון. נניח שקודקודים A, B, C של הריבוע ABCD נמצאים על הישר הראשון, השני, והשלישי בהתאמה. בגלל שאפשר להזיז את הריבוע במקביל לישרים, אפשר לקחת את B להיות נקודה שרירותית. סיבוב ב-90 מעלות מסביב ל-B יעביר את A ל-C. אותו הסיבוב יעביר את הישר הראשון שעובר דרך A לישר שעובר דרך C. לכן אפשר לבנות כך:
ניסוב את הישר הראשון מסביב ל-B ב-90 מעלות, ונקודת חיתוך של הישר המסובב עם הישר השלישי יהיה C.
כמובן יש כאן בחירה שרירותית: מסובבים אם או נגד כיוון השעון, וגם בקשר לתפקידים של הישרים. בעצם בצורה כזאת אפשר לקבל יותר מתשובה אחת.

4. נתונה נקודה K על צלע של מרובע. לבנות ישר דרך K שמחלק את המרובע לשני חלקים שווי שטח.

פתרון. נניח ללא הגבלת הכלליות ש-K נמצאת על צלע BC של משולש ABCD. נניח גם ש-ABK קטן מחצי שטח (אחרת אפשר להחליף תפקידים בין A ל-D ובין B ל-C).
נשווה את h_a ו- h_c הגבהים מהקודקודים A ו-C בהתאמה על האלכסון BD.

א. אם $h_c < h_a$ אז אפשר לקחת נקודה P על DA שנמצאת במרחק $(h_a - h_c)/2$ מהאלכסון BD. קל לראות שהקטע BP חוצה את השטח של ABCD, אבל הוא לא עובר דרך K.
נעביר ישר דרך B שמקביל ל-PK. הישר הזה יחתוך את AD בנקודה Q, והטענה היא ש-KQ חוצה את השטח. זה נובע מכך ש-KPQB הוא טרפז ולכן שטחי PKQ, PKB שווים.

ב. אם $h_c \geq h_a$ אז אפשר לקחת נקודה P על BC שנמצאת במרחק $(h_a - h_c)/2$ מהאלכסון BD. קל לראות שהקטע DP חוצה את השטח של ABCD, אבל הוא לא עובר דרך K.
כמו בסעיף הקודם, נבנה טרפז DKPQ כך ש-PQ מקביל ל-DK ונקודה Q על היקף המרובע, ואז KQ יחצה את השטח.

5. נתון משולש ABC. למצוא נקודה T, כזאת שסכום המרחקים AT + BT + CT יהיה מינימלי.

פתרון. זה נקרא נקודת פרמה או נקודת טוריצ'לי. התשובה היא: אם למשולש יש זוויות שגדולה מ-120 מעלות, אז T זה הקודקוד של הזווית הקהה. אם לא, אז זאת נקודה שרואה את כל הצלעות בזוויות של 120 מעלות.
במקרה השני אפשר לבנות את הנקודה כך: בונים על צלעות המשולש כלפי חוץ 3 משולשים שווי צלעות: ABR, BCP, ACQ. אז נקודת טוריצ'לי נמצאת גם על המעגלים החוסמים של המשולשים המשוכללים, וג על הישרים AP, BQ, CR.
לא קשה לבנות אם סרגל ומחוגה את נקודת החיתוך של AP ו-CQ.

לגבי הוכחת התכונה של נקודת טוריצ'לי, אפשר להסתכל במאמר על taharut.org :
http://taharut.org/articles/TorricelliH.pdf