<u>פיבונצ'י</u>

1. א. מצא את כל המספרים λ כאלה שהסדרה ההנדסית $\{a_n = \lambda^n\}$ שמקיימים "נוסחת הנסיגה של פיבונצ'י": $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

ב. הוכח שכל סדרה שמקיימת את משוואת פיבונצ'י היא סכום של (לכל היותר) שתי סדרות הנדסיות. הסק מכאן נוסחה מפורשת למספר פיבונצ'י f_n.

פתרון. א. $\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n$ לכל n אם ורק אם $\lambda^2 = \lambda + 1$. אנחנו יודעים נוסחה לפתרון של משוואה ריבועית, ואם נציב נקבל תשובה: $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

ב. קל לראות שכל סדרה מהסוג $x_n = u \cdot \lambda_1^n + v \cdot \lambda_1^n$ מקיימת את נוסחת הנסיגה של פיבונצ'י.

נוכיח שאפשר להציג כל סדרה שמקיימת $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ בצורה כזאת.

אם נצליח לבחור u, v כאלה ש- $a_1 = x_1$, $a_0 = x_0$, אז באינדוקציה נראה ש-

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = x_{n-1} + x_{n-2} = x_n$$

ובכן, מספיק שלמצוא u, v שמקיימים

$$u + v = a_0$$

$$u\lambda_1 + v\lambda_2 = a_1$$

קל לראות שלכל a_0, a_1 יש פתרון למערכת משוואות זאת כי $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (למה?).

בפרט, אם מתחילים מ-0,1 (סדרת פיבונצ'י הרגילה) נקבל $f_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

זאת הנוסחא הסגורה למספרי פיבונצ'י שידועה בתור נוסחת בינה (Binet).

2. א. כל הודעה מורכבת מ-N ספרות, שכולן אפסים או אחדים, אבל שני אחדים לא יכולים לבוא ברצף. כמה הודעות שונות אפשר ליצור?

ב. כל הודעה מורכבת מ-N ספרות, שהן 0, 1 או 2, ומקיימת תנאי נוסף: בין כל שתי הופעות של 2 בהודעה יש 0. כמה הודעות שונות אפשר ליצור במקרה זה?

א. פתרון ראשון. נסמן ב-a_n את כמות ההודעות באורך n. הודעה באורך n יכולה להסתיים ב-0 או ב-1. אם היא מסתיימת ב-0, אז זאת הודעה כלשהי באורך $n - 1$. אם היא מסתיימת ב-1, אז הספרה הלפני אחרונה 0, ולפני זה יש הודעה כלשהי באורך $n - 2$. לכן $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

לכן הסדרה זאת מקיימת את תנאי פיבונצ'י. יש הודעה יחידה באורך 0, ויש שני הודעות באורך 1, לכן זאת סדרת פיבונצ'י מוזזת ב-2. באמצעות נוסחאות Binet אפשר לרשום שהתשובה היא

$$a_n = f_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)$$

פתרון שני. נגדיר ***בסיס ספירה פיבונצ'י***. בסיס ספירה עשרוני זה כאשר מייצגים מספר טבעי באמצעות חזקות של 10 (ומנסים להשתמש בחזקות 10 הכי גדולות שאפשר, למשל אם אפשר להשתמש ב-100 פעמיים או 20 פעמים ב-10, משתמשים באפשרות הראשונה). בסיס ספירה בינארי זה אותו דבר אם חזקות של 2. בסיס ספירה פיבונצ'י זה אותו דבר כאשר משתמשים במספרי פיבונצ'י. אין צורך להשתמש במספר f_n פעמיים: כי $f_{n+1} < 2f_n$. מאותה סיבה אין צורך להשתמש בו-זמנית ב-f_n וגם ב-f_{n+1} – עדיף להשתמש ב-f_{n+2}. כמובן, אחרי שפירקנו את המספר לסכום, אפשר להציג אותו בתור סדרה של ספרות (הספרה הימנית תסמן את מספר הפעמים שלוקחים 1, הספרה השנייה מימין תסמן את מספר הפעמים שלוקחים 2, הספרה השלישית מימין את מספר הפעמים שלוקחים 3, הרביעית מימין – של 5 וכו').

אז קל לראות שהודעה תקנית באורך n זה מספר שרשום בבסיס פיבונצ'י שקטן מ-000...100 בבסיס פיבונצ'י (מספר מינימלי באורך n+1). אבל 000...100 בבסיס פיבונצ'י זה מספר פיבונצ'י f_{n+2}. לכן מספר של "הודעות" זה f_{n+2}.

ב. פתרון ראשון. שוב ננסה למצוא נוסחת נסיגה. נסמן ב-b_n את כמות ההודעות באורך n. כמות של הודעה באורך 2 + n יכולה להסתיים ב-0 (יש b_{n+1} כאלה) ויכולה להסתיים ב-1 (גם כאלה יש b_{n+1}) ויכולה להסתיים ב-2 : במקרה כזה היא מסתיימת ב-02 (ויש b_n כאלה) או ב-12 (ולא ברור כמה כאלה יש). כלומר $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n+x_n$, כאשר x_n זה כמות הודעות באורך n שאפשר להוסיף להם 12 בסוף.

אלה גם אותם הודעות שאפשר להוסיף להם 2 בסוף. מצד שני, כמות ההודעות באורך n שאסור להוסיף להם 2 בסוף זה $3a_n-a_{n+1}=a_n-x_n$ (כי אם נוסיף 0, 1, או 2 בסוף של כל הודעה, נקבל $3a_n$ מילים, שמתוכם רק a_{n+1} הן הודעות תקניות והאחרות מתקבלות כאשר מוסיפים 2 למרות שזה אסור). לכן $x_n=a_{n+1}-2a_n$.

וזה מאפשר לרשום סוף-סוף את כלל הנסיגה $a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$.

המנה של סדרה הנדסית שמקיימת היא שורש של משוואה ריבועית: $\mu^2-3\mu+1=0$.

אז $\mu_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}=\left(\lambda_{1,2}\right)^2$.

לכן כל סדרה מהסוג $b_n=u\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+v\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}$ תקיים את נוסחת הנסיגה. נקבל תשובה נכונה אם נדאג למקדמים כאלה ש- b_0,b_1 יהיו מה שהם צריכים להיות (כלומר 1,3).

כלומר התשובה היא: המספרים הזוגיים של פיבונצ'י: $b_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2(n+1)}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2(n+1)}\right)$.

פתרון שני. הודעות זה בדיוק רישום של מספרים אפשר לפתור את השאלה בקלות באמצעות מערכת ספירה שבוססת על המספרים הזוגיים של פיבונצ'י (כלומר 1, **1**, 2, **3**, 5, **8**, 13, **21**, ...) תשמעו על זה יותר במהלך המחנה המתקרב. לכן כמות ההודעות באורך נתון שווה למספר פיבונצ'י.

3. מצא נוסחא סגורה עבור הביטוי $f_1+f_3+...+f_{2n-1}$ וגם עבור $f_2+f_4+...+f_{2n}$, כאשר f_n מספרי פיבונצ'י (כלומר $f_1=1$, $f_0=0$, ונוסחת הנסיגה של פיבונצ'י).

תשובה. $f_1+f_3+...+f_{2n-1}=f_{2n}$. $f_2+f_4+...+f_{2n}=f_{2n+1}-1$.

פתרון ראשון. את הנוסחאות אפשר לגלות באמצעות בדיקה של כ-10 תוצאות התחלתיות. אחרי זה כבר לא קשה להוכיח אותן באינדוקציה.

פתרון שני. מספר $2n$-ספרתי הכי גדול בבסיס פיבונצ'י הוא 1010...1010, ומספר $2n$+1-ספרתי הכי קטן בבסיס פיבונצ'י הוא 1000...00 ומכאן ברור כי $f_3+f_5+...+f_{2n-1}=f_{2n}-1=f_{2n}-f_1$.
מספר $2n$+1-ספרתי הכי גדול בבסיס פיבונצ'י הוא 10101...1010, ומספר $2n$+1-ספרתי הכי קטן בבסיס פיבונצ'י הוא 1000...00 ומכאן ברור כי $f_2+f_4+...+f_{2n}=f_{2n+1}$.

4. נסמן ב- $\mathbb{N}$ את קבוצת המספרים השלמים החיוביים.
א. בנה פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שמקיימת: $f\left(f\left(n\right)\right)=f\left(n\right)+n$ לכל n, ובנוסף $f\left(1\right)=2$.

הערה. סעיף א' היה שאלה ב-IMO.

א. פתרון ראשון. נסמן באמצעות $\left[x\right]=\left\lfloor x+0.5\right\rfloor$ את השלם הקרוב ל-x, ונסמן גם $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. אז ניקח פונקציה $f\left(n\right)=\left[\varphi n\right]$. לא קשה לבדוק, שאם n שלם אז φn אינו חצי שלם, לכן אין ויכוח האם מעגלים למעלה או למטה. נניח כי $\varphi n=f\left(n\right)-\varepsilon$, אז $-\frac{1}{2}<\varepsilon<\frac{1}{2}$.

$$f\left(f\left(n\right)\right)=\left[\varphi\left(\varphi n+\varepsilon\right)\right]=\left[\varphi^2 n+\varepsilon\varphi\right]=\left[\varphi n+n+\varepsilon\varphi\right]=\left[A\right]$$

$$f\left(n\right)+n=\left[\varphi n\right]+n=\varphi n+\varepsilon+n=B$$

המספר השני שלם, והראשון הוא השלם הקרוב ל-A. בשביל להוכיח שהם שווים, מספיק להוכיח כי המרחק בין A ל-B קטן מ-0.5. ואכן, $A-B=\left(\varphi n+n+\varepsilon\varphi\right)-\left(\varphi n+\varepsilon+n\right)=\varepsilon\left(\varphi-1\right)=\frac{\varepsilon}{\varphi}$.

מש"ל.

פתרון שני. הזזה שמאלית בבסיס פיבונצ'י מקיימת את התנאי. למשל 1001010 יועבר ל-10010100. אז ברור לגמרי כי $f\left(f\left(n\right)\right)=f\left(n\right)+n$. גם לא קשה לבדוק כי $f\left(1\right)=2$.

4. ב.* נתון a חיובי שלם. בנה פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שמקיימת: $f\left(f\left(n\right)\right)=a\cdot f\left(n\right)+n$ לכל n, ובנוסף $f\left(1\right)=a+1$.

רעיונות לפתרון. אני חשבתי שאפשר לגרום לזה לעבוד $f\left(n\right)=\left[\psi\cdot n\right]$, כאשר סוגריים מרובעים מסמנים איזשהו סוג של חלק שלם ו- $\psi=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ שורש של משוואה $\psi^2 n=a\cdot\psi n+n$, אבל כרגע אני לא מצליח לגרום לזה לקיים את התנאי $f\left(1\right)=a+1$ ולא מצליח לתקן את זה.

קיים פתרון אחר שמשתמש במערכת ספירה שמוגדרת על ידי שני תנאים:
(1) הספרות הם 0, 1, ..., a.
(2) אחרי ספרה a רשומה ספרה 0.

תשמעו על זה יותר במחנה.

5. האם אפשר לחלק את המספרים הטבעיים (בלי 0) לאיחוד זר של שתי סדרות עולות $\left\{a_n\right\}$ ו-$\left\{b_n\right\}$, כך ש-$b_n=a_n+n$ לכל n?

אם כן, כמה מבין המספרים $\left\{1,2,3,...,55\right\}$ שייכים לסדרה הראשונה וכמה – לסדרה השנייה?

פתרון. אפשר לעשות זאת, ובדרך יחידה. אפשר להוכיח את זה באינדוקציה:
בשלב n לוקחים מספר הכי קטן שעוד לא נתפס והוא חייב להיות a_n ולכן ואז לוקחים a_n+n חייב להיות b_n (והוא עוד לא נתפס כי הוא יותר גדול מכל מספר שנתפס).
כמובן אפשר לחשב ישירות את כמות המספרים בכל סדרה מבין המספרים $\left\{1,2,3,...,55\right\}$, אבל אפשר גם להשתמש בשאלה 6.

הסדרות $a_n=\left\lfloor\varphi n\right\rfloor$, $b_n=\left\lfloor\varphi^2 n\right\rfloor$ כאשר $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ מקיימות את שני התנאים: מספרים טבעיים הם איחוד זר שלהם בגלל הטענה של שאלה 6, ובנוסף

$$a_n+n=\left\lfloor\varphi n\right\rfloor+n=\left\lfloor\left(\varphi+1\right)n\right\rfloor=\left\lfloor\varphi^2 n\right\rfloor=b_n.$$

לכן זאת החלוקה. אז כמות האיברים בסדרה ראשונה שווה ל- $\left\lfloor \frac{55}{\varphi}+\frac{1}{\varphi} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{56}{\varphi} \right\rfloor$.

55 זה מספר פיבונצ'י, לכן $\frac{55}{\varphi}$ קרוב מאוד למספר פיבונצ'י הקודם, 34, לכן $34 = \left\lfloor \frac{56}{\varphi} \right\rfloor$.

אז כמובן לסדרה השנייה שייכים 21 מספרים (שזה גם מספר פיבונצ'י).

(עד כמה הקירוב של $f_n \approx \frac{f_{n+1}}{\varphi}$ נכון והאם השיקול הנ"ל מוצדק?)

6. נתונים שני מספרים אירציונאליים α, β שגדולים מ-1. הוכח כי שני התנאים הבאים שקולים:

(א) המספרים הטבעיים הם איחוד זר של $\{\lfloor n\alpha \rfloor | n \in \mathbb{N}\}$ ושל $\{\lfloor n\beta \rfloor | n \in \mathbb{N}\}$.

(ב) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$.

הערה. $\lfloor x \rfloor$ מסמן חלק שלם או *ריצפה* של x, כלומר מספר שלם מקסימלי שאינו גדול מ-x.

פתרון. כמות האיברים של הסדרות שקטנים מ-N שווה ל- $\left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor$, $\left\lfloor \frac{N}{\beta} \right\rfloor$.

מהעובדה ש- α, β מספרים אירציונאליים המספרים $n\alpha, n\beta$ אינם שלמים.

תנאי א' שקול לכך שבין k לבין k+1 יש בדיוק איבר אחד (מתוך שני סדרות ביחד). זאת אומר בין 1 לבין N יש בדיוק $N - 1$ איברים של הסדרות.

$$\left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{\beta} \right\rfloor = N-1$$

ההפרש בין $\frac{N}{\alpha}+\frac{N}{\beta}$ לבין $\left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{\beta} \right\rfloor$ קטן מ-2. לכן תנאי הכרחי עבור (א) הוא ש- $\frac{N}{\alpha}+\frac{N}{\beta}-N = N\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-1\right)$ יהיה חסום. אז $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-1=0$.

ובכן (א) גורר (ב), וצריך להראות את הכיוון ההפוך. אם (ב), אז $\frac{N}{\alpha}+\frac{N}{\beta}=N$ ולכן החלקים השבורים של $\frac{N}{\alpha}, \frac{N}{\beta}$ משלימים זה את זה ל-1, לכן $\left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{\beta} \right\rfloor = N-1$ מש"ל.