

## פיבונצ'י

1. א. מצא את כל המספרים  $\lambda$  כאלה שהסדרה ההנדסית  $\{a_n = \lambda^n\}$  שמקיימים "נוסחת הנסיגה של פיבונצ'י":  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ .
- ב. הוכח שכל סדרה שמקיימת את משוואת פיבונצ'י היא סכום של (לכל היותר) שתי סדרות הנדסיות. הסק מכאן נוסחה מפורשת למספר פיבונצ'י  $f_n$ .
2. א. כל הודעה מורכבת מ-N ספרות, שכולן אפסים או אחדים, אבל שני אחדים לא יכולים לבוא ברצף. כמה הודעות שונות אפשר ליצור?
- ב. כל הודעה מורכבת מ-N ספרות, שהן 0, 1 או 2, ומקיימת תנאי נוסף: בין כל שתי הופעות של 2 בהודעה יש 0. כמה הודעות שונות אפשר ליצור במקרה זה?
3. מצא נוסחא סגורה עבור הביטוי  $f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1}$  וגם עבור  $f_2 + f_4 + \dots + f_{2n}$ , כאשר  $f_n$  מספרי פיבונצ'י (כלומר  $f_1 = 1$ ,  $f_0 = 0$ , ונוסחת הנסיגה של פיבונצ'י).
4. נסמן ב- $\mathbb{N}$  את קבוצת המספרים השלמים החיוביים.
- א. בנה פונקציה  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  שמקיימת:  $f(f(n)) = f(n) + n$  לכל  $n$ , ובנוסף  $f(1) = 2$ .
- ב. \* נתון  $a$  חיובי שלם. בנה פונקציה  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  שמקיימת:  $f(f(n)) = a \cdot f(n) + n$  לכל  $n$ , ובנוסף  $f(1) = a + 1$ .
5. האם אפשר לחלק את המספרים הטבעיים (בלי 0) לאיחוד זר של שתי סדרות עולות  $\{a_n\}$  ו- $\{b_n\}$ , כך ש- $b_n = a_n + n$  לכל  $n$ ?
- אם כן, כמה מבין המספרים  $\{1, 2, 3, \dots, 55\}$  שייכים לסדרה הראשונה וכמה – לסדרה השנייה?
6. נתונים שני מספרים אירציונאליים  $\alpha, \beta$  שגדולים מ-1. הוכח כי שני התנאים הבאים שקולים: (א) המספרים הטבעיים הם איחוד זר של  $\{\lfloor n\alpha \rfloor | n \in \mathbb{N}\}$  ושל  $\{\lfloor n\beta \rfloor | n \in \mathbb{N}\}$ .
- (ב)  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ .
- הערה.  $\lfloor x \rfloor$  מסמן חלק שלם או ריצפה של  $x$ , כלומר מספר שלם מקסימלי שאינו גדול מ- $x$ .