משוואות דיופנטיות וחסמים

1. א. n מספר שלם, $m = n^2 + 3n + 5$ הוא ריבוע שלם. מצא את m.
ב. מצא את כל המספרים הטבעיים שעבורם $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ הוא ריבוע שלם.

תשובה. א. 9. ב.רק $n = 3$.

פתרון. א. נניח ש-n אי-שלילי. אז בדרך כלל מתקיים $(n+1)^2 < n^2 + 3n + 5 < (n+2)^2$.
מאי-שוויון הזה נובע m אינו ריבוע.
האי-שוויון השמאלי מתקיים תמיד, והימני מתקיים כאשר $5 < n + 4$, כלומר $1 < n$.
ובכן מבין המספרים האי-שליליים מספיק לבדוק 0 או $n = 1$, ואז 5 או $m = 9$.

כעת נבדוק את השליליים. אז נוכיח שבדרך כלל $(n+1)^2 > m > (n+2)^2$, ולכן m אינו ריבוע.
האי-שוויון הימני מתקיים כאשר $5 > n + 4$ וזה נכון לכל מספר שלילי. השמאלי מתקיים כאשר $n^2 + 2n + 1 > n^2 + 3n + 5$ כלומר כאשר $-4 > n$.
לכן מספיק לבדוק כאשר 4 אפשרויות: $n = -1, -2, -3, -4$. אז $n^2 + 3n + 5 = 3, 3, 5, 9$ בהתאמה.
רק במקרה אחד זה יוצא ריבוע, וזה שוב 9.

ובכן $m = 9$ זאת התשובה היחידה.

ב. אותו רעיון כמו ב-א', לחסום בין שני ריבועים עוקבים, ואז נראה שהוא לא ריבוע.
כרגיל, נסמן ב-$\lfloor x \rfloor$ וב-$\lceil x \rceil$ את התקרה והרצפה של x בהתאמה, כלומר את המספר השלם הכי גדול שלא גדול מ-x והמספר השלם הכי קטן שאינו קטן מ-x.

ובכן, מצד אחד $\left(n^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)^2 \le \left(n^2 + \frac{n}{2}\right)^2 = n^4 + n^3 + \frac{n^2}{4} < n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$, ומצד שני

$$\left(n^2 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)^2 \ge \left(n^2 + \frac{n}{2} + 1\right)^2 = n^4 + n^3 + \left(2 + \frac{1}{4}\right)n^2 + n + 1 > n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$$

(כמובן, במקרה של $n = 0$ יש שוויון באי-שוויון האחרון, אבל אני לא מחשיב את 0 לטבעי.)
המספר השלם היחיד בין $n^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ לבין $n^2 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ הוא $n^2 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, וזה רק כאשר n אי-זוגי, אז

לכן אם $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ הוא ריבוע שלם, אז הוא ריבוע של $n^2 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = n^2 + \frac{n+1}{2}$. ובכן:

$$\left(n^2 + \frac{n+1}{2}\right)^2 = n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$$

$$n^4 + n^2(n+1) + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$$

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = n + 1$$

$$n^2 + 2n + 1 = 4n + 4$$

$$n^2 - 2n + 1 = 4$$

$$n - 1 = \pm 2$$

זה נותן שני פתרונות, שרק אחד מהם שלם: $n = 3$.

נבדוק $3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 81 + 27 + 9 + 3 + 1 = 90 + 30 + 1 = 121 = 11^2$

2. מצא את כל הפתרונות השלמים של המשוואה

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3 .$$

תשובה. $(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)$

פתרון. קודם כל, קל לראות שלכל המחוברים בצד שמאל יש את אותו הסימן. לכן צריך שלושתם יהיו חיוביים. לכן מבין x,y,z יש מספר זוגי של מספרים שליליים. החלפה של שני סימנים תהפוך פתרון לפתרון, לכן מספיק למצוא פתרונות אי-שליליים, ואז מכל פתרון כזה נקבל עוד 3 פתרונות שלמים על ידי הוספה של סימן מינוס לשניים מהמספרים. כמובן, אף אחד מבין השלושה לא מתאפס, כי אז המשוואה אינה מוגדרת, לכן מספיק לחפש פתרונות טבעיים.
עבור הטבעיים נקבל, לפי אי-שוויון הממוצעים:

$$\frac{\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}\geq1$$

בשביל שיהיה שוויון, צריך ש-$xyz=1$ כלומר $x=y=z=1$. לכן יש רק פתרון אחד בטבעים ורק 4 פתרונות בשלמים. הבדיקה מיידית.

3. מצא את כל הזוגות (a, b) של מספרים טבעיים כאלה ש- $a^2b + a + b$ מתחלק ב- $ab^2 + b + 7$.

תשובות: $(49, 1)$, $(11, 1)$ ועוד משפחה אינסופית: $(7k^2,7k)$ לכל k טבעי.

פתרון. אם התנאי מתקיים אז (נכפיל ב-b) גם $a^2b^2+ab+b^2$ מתחלק ב- $d=ab^2+b+7$ ולכן (נחסיר ad) גם b^2-7a מתחלק בו. בדרך כלל $d>b^2-7a>-d$.
החלק הימני נכון תמיד, והשמאלי $b^2-7a>-(ab^2+b+7)$ כלומר $ab^2+b+b^2+7>7a$.
זה נכון במקרה ש-$b\geq3$. ובכן, נשארו האופציות הבאות:

א. $b = 1$

ב. $b = 2$

ג. $b^2-7a=0$ (הרי אין מספרים נוספים בין $-d$ לבין d שמתחלקים ב-d).

נבדוק את 3 האפשרויות.

(א) $b = 1$: אז הדרישה היא ש-a^2+a+1 מתחלק ב-$d=a+8$. גם $(a+8)(a-7)=a^2+a-56$ מתחלק ב-d לכן זה קורה אך ורק כשההפרש $= 57$ מתחלק ב-d. מחלקים של 57 הם 1, 3, 19 ו-57 עצמו, אבל $d=a+8$ גדול מ-8, לגן d יכול להיות 19 או 57, לכן a יגול להיות 11 או 49.

(ב) $b = 2$: אז הדרישה היא ש-$2a^2+a+2$ מתחלק ב-$d=4a+9$.
גם $2(2a^2+a+2)-da=2a+4-9a=4-5a$ מתחלק ב-d (וזה תנאי שקול: d אי-זוגי לכן כפל ב-2 לא משנה התחלקות או חוסר התחלקות ב-d) לכן גם $4-5a+d=13-a$ מתחלק ב-d. אבל $-d<13-a<d$ לכן זה קורה אך ורק כאשר $13-a=0$ אז $a = 13$, אבל הבדיקה פוסלת את המקרה הזה.

(ג) $b^2=7a$. אז b מתחלק ב-7, כלומר $b = 7k$, ואז $49k^2=7a$ כלומר $7k^2=a$. נבדוק אם הזוג $(a,b)=(7k^2,7k)$ מתאים. $a^2b+a+b=7^3k^5+7k^2+7k$ מתחלק ב-
$d=ab^2+b+7=7^3k^4+7k^2+7$ וזה אכן נכון (כי זה שווה kd).

ובכן, מצאנו את כל התשובות.

4. א. מצא את כל הזוגות של שלמים $m, n > 2$ כאלה ש- $\frac{k^m+k^2-1}{k^n+k-1}$ שלם עבור אינסוף ערכים שלמים חיוביים של k.

ב. מצא את כל הזוגות של שלמים $m, n > 2$ כאלה ש- $\frac{k^m+k-1}{k^n+k^2-1}$ שלם עבור אינסוף ערכים שלמים חיוביים של k.

תשובות. א. אין תשובות. ב. $m = 5, n = 3$.

פתרון. מקדם המוביל של הפולינום במחנה הוא 1. לכן אפשר לבצע חלוקה עם שארית $p(k)=a(k)q(k)+b(k)$ כאשר p הוא המונה, q הוא המחנה, a, b פולינומים בעלי מקדמים שלמים, כאשר $\deg b < \deg q$. אז $\frac{p(k)}{q(k)}=a(k)+\frac{b(k)}{q(k)}$. אבל $a(k)$ שלם לכל k שלם, לכן אם $\frac{p(k)}{q(k)}$ שלם אז $\frac{b(k)}{q(k)}$ שלם. אם b לא אפס זהותי, אז עבור k מספיק גדול $b(k)$ אינו מתאפס, ובנוסף גם $|b(k)|<|q(k)|$, לכן היחס אינו שלם. ובכן, אם יש שארית לא אפסית בחלוקה של פולינומים, אז יש רק מספר סופי של הערכים השלמים של k בהם השבר שלם.
מכאן קל לפתור את א' ואם קצת עבודה אפשר לפתור גם את ב'.

א. נניח כי הפולינום $p(x)=x^m+x^2-1$ מתחלק ב- $q(x)=x^n+x-1$.
מכאן שני מסקנות: $n\le m$ וכל שורש (מרוכב) של q הוא גם שורש של p. ל-q יש שורש ממשי חיובי κ בין 0 ל-1 (הרי $q(0)<0<q(1)$). הוא מקיים $0=\kappa^n+\kappa-1$ וגם $p(\kappa)=\kappa^m+\kappa^2-1=0$ כי הוא חייה להיות שורש של p, אבל זה לא יתכן כי $\kappa^m+\kappa^2<\kappa^n+\kappa$. לכן אין פתרון.

ב. נניח כי הפולינום $p(x)=x^m+x-1$ מתחלק ב- $q(x)=x^n+x^2-1$. אז $n\le m$. גם הפולינום

$$(x+1)p-q=\left(x^{m+1}+x^m+x^2-1\right)-\left(x^n-x^2-1\right)=x^{m+1}+x^m-x^n=\left(x^{m-n+1}+x^{m-n}-1\right)x^n$$

מתחלק ב-q. לכן $r(x)=x^{m-n+1}+x^{m-n}-1$ מתחלק ב-q. לכן גם $n\le m-n+1$.
אבל $n > 2$. לכן $2\le m-n$.
ל-q יש שורש ממשי חיובי κ בין 0 ל-1 (הרי $q(0)<0<q(1)$). הוא מקיים $0=\kappa^n+\kappa^2-1$ הוא גם שורש של r, כלומר $0=\kappa^{m-n+1}+\kappa^{m-n}-1$. אבל $\kappa^n+\kappa^2-1\ge\kappa^{m-n+1}+\kappa^{m-n}-1$, הרי $\kappa^2\ge\kappa^{m-n}$, $\kappa^n\ge\kappa^{m-n+1}$. לכן חייב להתקיים שוויון בכל שלוש האי-שוויונים האחרונים.
לכן גם אי-שוויונים $2\ge m-n$, $n\ge m-n-1$ הופכים לשוויון.כלומר $2n-1=m=n+2$, לכן $n=3$ ולכן $m=5$.

מכאן שני מסקנות: $n\le m$ וכל שורש (מרוכב) של q הוא גם שורש של p. ל-q יש שורש ממשי חיובי κ בין 0 ל-1 (הרי $q(0)<0<q(1)$). הוא מקיים $0=\kappa^n+\kappa-1$ וגם $p(\kappa)=\kappa^m+\kappa^2-1=0$ כי הוא חייה להיות שורש של p, אבל זה לא יתכן כי $\kappa^m+\kappa^2<\kappa^n+\kappa$. לכן אין פתרון.

נבדוק: $\frac{k^5+k-1}{k^3+k^2-1}=k^2-k+1$ וזה שלם לאינסוף k-ים טבעיים (האמת לכולם).

5. מצא את כל זוגות השלמים החיוביים (m, n) כאלה ש- $\frac{m^2}{2mn^2-n^3+1}$ חיובי שלם.

תשובה. $\left(8a^4-a,2a\right)\ \ ,\ \ \left(a,2a\right)$

פתרון. נניח כי $k=\dfrac{m^2}{2mn^2-n^3+1}$ חיובי שלם. זאת משוואה ריבועית על m:

$$m^2-\left(2kn^2\right)m+k\left(n^3-1\right)=0 .$$

נסמן את השורשים m_1,m_2. לפי וייטה

$$m_1+m_2=2kn^2$$
$$m_1m_2=k\left(n^3-1\right)$$

הסכום שלם, לכן אם שורש אחד שלם, אז גם השני שלם. המכפלה אינה שלילית, לכן אם שורש אחד חיובי, אז גם השורש השני אי-שלילי. ובכן, השורשים הם מספרים שלמים אי-שליליים, הגדול מהם הוא m_2 והוא גדול או שווה למחצית הסכום: $m_2\ge kn^2$. ואז $m_1=\dfrac{k\left(n^3-1\right)}{m_2}<\dfrac{kn^3}{kn^2}=n$.

שיקול אינטואיטיבי שעוזר להגיע להוכחה: אם $m_1<n$, אז $m_2\approx 2kn^2$ אז מהמכפלה רואים כי $m_2\approx\dfrac{n}{2}$ עם דיוק טוב. נהפוך את זה להוכחה אמיתית.

למען קיצור נסמן $m_1=a$

$$k\left(n^3-1\right)=a\left(2kn^2-a\right)<a\cdot\left(2kn^2\right)$$

לכן $\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{2n^2}<a$.

מצד שני $k\left(n^3-1\right)=a\left(2kn^2-a\right)>a\cdot\left(2kn^2-2n\right)\ge a\cdot 2k\left(n^2-n\right)$

לכן $n+1\ge\dfrac{n}{2}+\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{\left(n-1\right)\left(n^2+n+1\right)}{2\left(n-1\right)n}=\dfrac{k\left(n^3-1\right)}{2k\left(n^2-n\right)}>m_1$

ובכן $\dfrac{n}{2}+1>a>\dfrac{n-1}{2}$. בגלל ש- a שלם, יש רק שתי אפשרויות עבורו $\dfrac{n}{2}$ או $\dfrac{n+1}{2}$.

במילים אחרות $2a=n$ או $2a-1$. נבדוק את שני המקרים.

(א) $2a=n$. אז התנאים הם

$$a+m_2=2k\left(2a\right)^2$$
$$a\cdot m_2=k\left(\left(2a\right)^3-1\right)$$

מהתנאי האחרון רואים כי k מתחלק ב-a, כי בגורם השני באגף ימני זר ל-a. לכן נרשום $k=ac$.

אז התנאים הופכים ל:

$$m_2=8a^3c-a$$
$$m_2=c\left(8a^3-1\right)$$

ואז התנאי הוא $c=a$. מקבלים $n=2a\ \ ,\ \ m_2=8a^4-a\ \ ,\ \ m_1=a$.

נבדוק: עבור $m=a$ המחנה של $\dfrac{m^2}{2mn^2-n^3+1}$ שווה 1, לכן מקבלים מספר שלם. במקרה השני

$$\frac{m^2}{2mn^2-n^3+1}=\frac{\left(8a^4-a\right)^2}{\left(2\left(8a^4-a\right)-2a\right)\left(2a\right)^2+1}=\frac{64a^8-16a^5+a^2}{\left(16a^4-4a\right)\left(2a\right)^2+1}=\frac{64a^8-16a^5+a^2}{64a^6-16a^3+1}=a^2$$

לכן כל שני המשפחות של תשובות שמצאנו במקרה זה מתאימות.

(ב) $n = 2a + 1$. אז התנאים הם

$$a + m_2 = 2k(2a+1)^2$$

$$a \cdot m_2 = k\left((2a+1)^3 - 1\right) = k\left(8a^3 + 12a^2 + 6a\right)$$

לכן $k\left(8a^2 + 12a + 6\right) = m_2 = 2k(2a+1)^2 - a$.

$$2k\left(4a^2 + 4a + 1\right) - a = k\left(8a^2 + 12a + 6\right)$$

$$-a = 4ka + 4k$$

וזה בלתי אפשרי – מספר שלילי שווה למספר חיובי.