משוואות פונקציונאליות

הגדרה חשובה. מסלול של x תחת פונקציה f זאת קבוצה $\left\{x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots\right\}$ (באנגלית ***orbit***).

1. א. מצא כל פונקציות $y=f(x)$ המקיימות $2\cdot f(1-x)+1=x\cdot f(x)$.

ב. מצא כל פונקציות $y=f(x)$ המקיימות $x\cdot f(x)+2\cdot f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$.

תשובות. א. $f(x)=\frac{x-3}{x^2-x+4}$.

ב. $f(x)=\frac{4x^2-x+1}{5x^2-5x}$ בתחום הבא: $x\neq -1,\ x\neq 0,\ x\neq 1$.

פתרון. א. מחליפים את x ב-$(1-x)$:

$$2\cdot f(x)+1=(1-x)\cdot f(1-x).$$

מהמשוואה המקורית נקבל $f(1-x)=\frac{x\cdot f(x)-1}{2}$.

מציבים: $2\cdot f(x)+1=(1-x)\cdot\frac{x\cdot f(x)-1}{2}$.

מפה נקבל: $\boxed{f(x)=\frac{x-3}{x^2-x+4}}$.

חשוב לבדוק שהתשובה שקיבלנו מתאימה. f מוגדרת תמיד, כי $x^2-x+4>0$.
(עגב, למה זה חשוב?) נציב אותה בתנאי המקורי ונראה:

$$2\cdot\frac{-x-2}{x^2-x+4}+1=x\cdot\frac{x-3}{x^2-x+4}$$
$$-2(x+2)+x^2-x+4=x^2-3x$$

וזה נכון.

ב. נתון $x\cdot f(x)+2\cdot f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$ **.**(1)

מחליפים את x ב- $\frac{x-1}{1+x}$. (כלומר, $x\to\frac{x-1}{1+x}$). נקבל:

$$\frac{x-1}{1+x}\cdot f\left(\frac{x-1}{1+x}\right)+2\cdot f\left(\frac{\frac{x-1}{1+x}-1}{\frac{x-1}{1+x}+1}\right)=1$$

$$\frac{x-1}{1+x}\cdot f\left(\frac{x-1}{1+x}\right)+2\cdot f\left(\frac{-1}{x}\right)=1 \qquad (2)$$

ב- (1) <u>מחליפים</u> את x ב- $\left(-\frac{1}{x}\right)$**.** (כלומר, $x\to\left(-\frac{1}{x}\right)$). נקבל:

$$\frac{-1}{x}\cdot f\left(\frac{-1}{x}\right)+2\cdot f\left(\frac{\frac{-1}{x}-1}{\frac{-1}{x}+1}\right)=1$$

$$(3)\qquad \frac{-1}{x}\cdot f\left(\frac{-1}{x}\right)+2\cdot f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=1$$

ב- (1) מחליפים את x ב- $\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$. (כלומר, $x\to\frac{x+1}{1-x}$). נקבל:

$$\frac{x+1}{1-x}\cdot f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)+2\cdot f\left(\frac{\frac{x+1}{1-x}-1}{\frac{x+1}{1-x}+1}\right)=1$$

$$(4):\qquad \frac{x+1}{1-x}\cdot f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)+2\cdot f(x)=1$$

בסוף-סוף קיבלנו מערכת מתוך 4 משוואות: (1),(2),(3),(4) ו- 4 נעלמים:

$$\left\{f(x),\quad f\left(\frac{x+1}{1-x}\right),\quad f\left(-\frac{1}{x}\right),\quad f\left(\frac{x-1}{1+x}\right)\right\}$$

נקבל: $f(x)=\frac{4x^2-x+1}{5x^2-5x}$ בתחום הבא: $x\neq -1,\ x\neq 0,\ x\neq 1$

(הפרטים והבדיקה הם תרגיל לקוראים)

2. פתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x^3+2x^2+2x=y \\ y^3+2y^2+2y=z \\ z^3+2z^2+2z=x \end{cases}.$$

תשובה. $(0,0,0),(-1,-1,-1)$

פתרון. נתבונן בפונקציה $f(t)=t^3+2t^2+2t$. מכיוון ש- $f'(t)=2t^2+4t+2>0$ עבור כל t, נקבל כי $f(t)$ פונקציה עולה לכל t.

ניתן לרשום את המערכת כך:

$$\begin{cases} f(x)=y \\ f(y)=z \\ f(z)=x \end{cases}.$$

ע"י הצבה נקבל $x=f\left(f\left(f(x)\right)\right)$. מכיוון ש-$f(t)$ פונקציה עולה לכל t, אם $f(x)>x$ אז גם $f\left(f\left(f(x)\right)\right)>f\left(f(x)\right)>f(x)>x$.

באופן דומה אם $f(x)<x$ אז גם $f\left(f\left(f(x)\right)\right)<f\left(f(x)\right)<f(x)<x$

לכן בשביל $x=f\left(f\left(f(x)\right)\right)$ חייבים שיתקיים $f(x)=x$. לכן בכל הפתרונות $x=y=z$, ובנוסף $x^3+2x^2+2x=x$, במילים אחרות $0=x\left(x^2+2x+1\right)=x(x+1)^2$.

כלומר x הוא 0 או -1. לאחר מכן ע"י הצבה נקבל שפתרונות המערכת הם: $(0,0,0),(-1,-1,-1)$.

3. האם קיימת פונקציה מקבוצה של כל המספרים טבעיים לעצמה שעבורה $f\left(f\left(n\right)\right)=n+1987$?
הערה. זאת שאלה מ-IMO, נחשו איזה שנה.

פתרון. ראשית נשים לב כי הפונקציה $f\left(n\right)$ היא חד-חד ערכית, הרי אם $f\left(n_1\right)=f\left(n_2\right)$ אז $n_1=f\left(f\left(n_1\right)\right)-1987=f\left(f\left(n_2\right)\right)-1987=n_2$. נגדיר $g\left(n\right)=f\left(f\left(n\right)\right)$. מהנתון ברור כי לכל $p\in\left\{0,1,2,...,1986\right\}$ לא קיים n עבורו $g\left(n\right)=p$, כי אז נקבל סתירה לנתון. עם זאת, לכל p שלא שייך לקבוצה הנ"ל, בהכרח ימצא n מתאים. כלומר, ישנם 1987 ערכים אותם $g\left(n\right)$ לא יכולה לקבל. נניח כעת כי $f\left(n\right)$ לא יכולה לקבל את קבוצת הערכים השונים הבאה: $\left\{v_1,v_2,...,v_k\right\}$, כלומר k ערכים שונים סה"כ. זה אומר ש- $g\left(n\right)=f\left(f\left(n\right)\right)$ לא יכולה לקבל את קבוצת הערכים הבאה: $V=\left\{v_1,v_2,...,v_k,f\left(v_1\right),f\left(v_2\right),...,f\left(v_k\right)\right\}$ - בה גם כל הערכים שונים זה מזה. מובן כי אלה הערכים היחידים ש - $g\left(n\right)$ לא יכולה לקבל, כי הרי אם $a\notin V$ אז קיים n_0 עבורו $f\left(n_0\right)=a$. כפי ש- n_0 עצמו לא שייך לקבוצה $\left\{v_1,v_2,...,v_k\right\}$, קיים n_1 עבורו $f\left(n_1\right)=n_0$, לכן $f\left(f\left(n_1\right)\right)=a$. אבל V מכילה מספר זוגי של איברים, בניגוד לכך ש- $g\left(n\right)$ לא יכולה לקבל 1987 ערכים – סתירה.

4. נתונה פונקציה שמקיימת $f\left(f\left(x\right)\right)=3\left|x\right|-4$. למה שווה $f\left(0.8\right)$?

תשובה. ☺ הפונקציה לא מוגדרת ב-0.8.

פתרון. שני תרגילים פשוטים לקוראים:
(א) לפתור את המשוואה $g\left(x\right)=3\left|x\right|-4=x$. (תשובות: -1, 2).
(ב) לפתור את המשוואה $g\left(g\left(x\right)\right)=3\left|3\left|x\right|-4\right|-4=x$. (תשובות: -1, 2, 0.8, -1.6).

נסתכל על המסלול של 0.8 תחת *f*. קל לראות שיש במסלול 4 נקודות: $x_1=0.8$ עובר ל- $f\left(x_1\right)=x_2$ והוא עובר ל- $f\left(x_2\right)=x_3=-1.6$ והוא עובר ל- $f\left(x_3\right)=x_4$ והוא עובר ל- $f\left(x_4\right)=x_1$. לכל 4 הנקודות יש מסלול באורך 4. אבל יש רק שני נקודות שיש להן מסלול באורך 4 (נקודות -1, 2, לא מתאימות, כי הם לא חלק מהמסלול באורך 4 כי הם שייכים למסלולים באורך 2 או 1). לכן זה לא יכול להיות.

5. מצא פונקציה $f\left(x\right)$ ותחום הגדרה שלה כך שהתנאי $f\left(f\left(x\right)\right)=x^2-2$ מתקיים על הקטע $\left[1\frac{1}{2},2\right]$.

פתרון. נתבונן בפונקציה $f\left(x\right)=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot x^{\sqrt{2}}}\right\}$ בתחום $x\in\left[1.5,\ 2\right)$. כאן $\left\{x\right\}=x-\left[x\right]$ הוא החלק השבור של x. ברור כי מתקיימים האי שיוויונים הבאים:

$$\left(1.5\le x<2\right)\Leftrightarrow\left(1.5^{\sqrt{2}}\le x^{\sqrt{2}}<\ 2^{\sqrt{2}}\right)\Leftrightarrow\left(2\cdot1.5^{\sqrt{2}}\le2\cdot x^{\sqrt{2}}<\ 2\cdot2^{\sqrt{2}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow0<\frac{1}{2\cdot2^{\sqrt{2}}}<\frac{1}{2\cdot x^{\sqrt{2}}}\le\frac{1}{2\cdot1.5^{\sqrt{2}}}<1$$

כאשר $x\in\left[1.5,\ 2\right)$ נקבל

$$f(x)=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot x^{\sqrt{2}}}\right\}=2\cdot\frac{1}{2\cdot x^{\sqrt{2}}}=\frac{1}{x^{\sqrt{2}}}$$

לפיכך

$$f(f(x))=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot\left(2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot x^{\sqrt{2}}}\right\}\right)^{\sqrt{2}}}\right\} \text{ או } f(f(x))=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot(f(x))^{\sqrt{2}}}\right\}$$

כלומר אם

$$(1.5\le x<2)\Rightarrow(2.25\le x^2<4)\Rightarrow\left(1<\frac{2.25}{2}\le\frac{x^2}{2}<2\right)$$

אזי

$$f(f(x))=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot\left(2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot x^{\sqrt{2}}}\right\}\right)^{\sqrt{2}}}\right\}=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{x^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}}\right\}=2\cdot\left\{\frac{x^2}{2}\right\}=2\cdot\left(\frac{x^2}{2}-1\right)=x^2-2$$

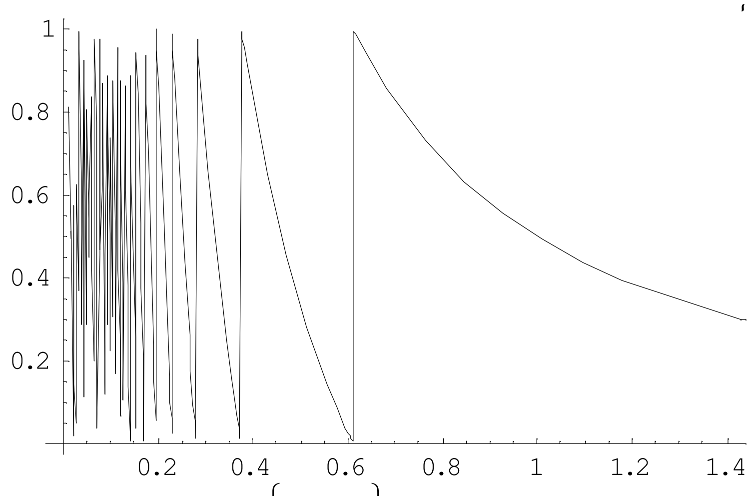
כלומר

$$D(f(x))=(0,\ +\infty) \text{ וכן } f(x)=\begin{cases}2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot x^{\sqrt{2}}}\right\}, & 0<x\ne 2\\ 2, & x=2\end{cases}$$

או

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[1.5;2]\\ x-2, & x\in[2.25;4]\end{cases}$$

להן גרף הפונקציה



לפי דרך אחרת, אם $x\in\left(-2,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\ 2\right)$ ו- $f(x)=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot|x|^{\sqrt{2}}}\right\}$ אזי

$$\left(\sqrt{2}<|x|<2\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}<|x|^{\sqrt{2}}<\ 2^{\sqrt{2}}\right)\Leftrightarrow\left(2\cdot\sqrt{2}^{\sqrt{2}}<2\cdot|x|^{\sqrt{2}}<\ 2\cdot 2^{\sqrt{2}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{1}{2\cdot 2^{\sqrt{2}}}<\frac{1}{2\cdot|x|^{\sqrt{2}}}\le\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}<1$$

לכן עבור $x \in \left(-2,-\sqrt{2} \right) \cup \left(\sqrt{2},\ 2 \right)$ נקבל

$$f\left(x\right)=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot|x|^{\sqrt{2}}}\right\}=2\cdot\frac{1}{2\cdot|x|^{\sqrt{2}}}=\frac{1}{|x|^{\sqrt{2}}}$$

וכן

$$f\left(f\left(x\right)\right)=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot\left|f\left(x\right)\right|^{\sqrt{2}}}\right\}$$

או

$$f\left(f\left(x\right)\right)=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot\left|2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot|x|^{\sqrt{2}}}\right\}\right|^{\sqrt{2}}}\right\}$$

לכן עבור

$$\left(\sqrt{2}<|x|<2\right)\Rightarrow\left(2<x^2<4\right)\Rightarrow\left(1<\frac{x^2}{2}<2\right)$$

נקבל

$$f\left(f\left(x\right)\right)=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot\left|2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot x^{\sqrt{2}}}\right\}\right|^{\sqrt{2}}}\right\}=2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot\left|\frac{1}{x^{\sqrt{2}}}\right|^{\sqrt{2}}}\right\}=2\cdot\left\{\frac{x^2}{2}\right\}=2\cdot\left(\frac{x^2}{2}-1\right)=x^2-2$$

כלומר

$$\boxed{f\left(x\right)=\begin{cases}2\cdot\left\{\frac{1}{2\cdot|x|^{\sqrt{2}}}\right\}, & 0<|x|\neq 2\\ 2, & |x|=2\end{cases}}.$$

הערה. כל הדוגמאות בתרגיל זה נלקחו ממאמר של פיטר סמובול באתר taharut.org
http://taharut.org/articles/FFX.pdf