תרגיל 10

חשבון זוויות

1. צורה גיאומטרית Q היא איחוד של 5771 עיגולים שונים שכל רדיוסיהם שווים ל-1, וכל המעגלים שלהם עוברים דרך נקודה A. הנקודה A היא נקודה פנימית של הצורה Q. חשב את ההיקף של Q.

תשובה. 4π.

פתרון. הגבול של Q מורכב מקשתות. כל קשת כזאת שווה לזווית מרכזית, כי הרדיוס 1, אבל גדולה פי 2 מזווית היקפית. לכן זווית שבה A רואה את הקשת שווה למחצית האורך שלה. סכום זוויות הראיה מ-A שווה ל- 2π, ולכן סכום אורכי הקשתות 4π.

2. נתבונן בשלושה מעגלים שכל אחד מהם מתקבל משיקוף של מעגל החוסם לגבי אחת הצלעות של המשולש.

א. הוכח כי המעגלים האלה נפגשים בנקודה אחת.

ב. הוכח כי זאת נקודת חיתוך הגבהים.

פתרון. נניח ש-ABC הוא משולש חד-זווית, והגבהים AD, BE, CF נחתכים ב-H. המרובע AFHE חסום, לכן הזווית BAC משלימה ל- 180º את FHE, ששווה ל-BHC. לכן המעגל החוסם של BHC סימטרי ל-BAC ביחס לישר BC.
באופן דומה מעגלים חוסמים של ABH, ACH סימטריים למעגל החוסם של ABC ביחס לישרים AB, AC בהתאמה. זה פותר את השאלה למשולש חד-זווית.

בשביל לפתור אותה שאלה למשולש קהה זווית אפשר להשתמש באותה תמונה אבל לקחת משולש ABH, ואז C תהיה נקודת מפגש הגבהים. אבל המעגלים החוסמים של ABC, ABH, CBH, ACH כולם שונים ובאותו גודל (כמו שכבר הוכחנו), לכן שלושה מעגלים אחרים סימטריים למעגל החוסם של ABH ביחס לצלעותיו, וכולם נפגשים ב-C (שהוא נקודת מפגש הגבהים.

בשביל משולש ישר זווית - הקודקוד של הזווית הישרה היא נקודת מפגש הגבהים. השיקוף ביחס ליתר לא מזיז את המעגל החוסם, ושיקוף ביחס לניצב לא משנה את העובדה שהמעגל עובר דרך הקודקוד של הזווית הישרה.

3. הוכח את הגרסה החיצונית של נוסחת אוילר: אם r_a הוא רדיוס של מעגל החסום מבחוץ לצלע a, אז את המרחק בין המרכז של המעגל הזה לבין המרכז של המעגל החוסם אפשר לחשב לפי נוסחא $d_a^2 = R^2 + 2Rr_a$, כאשר R הוא הרדיוס של המעגל החוסם.

פתרון. יהיו ABC קודקודי המשולש, M אמצע הקשת BC של המעגל החוסם, K מרכז של מעגל החסום מבחוץ. גם M וגם K נמצאים על החוצה זווית הפנימי של הזווית A של המשולש. כמו זוויות של משולש יסומנו α, β, γ.

טענה. BM = KM.

אפשר לחשב את המרחק באמצעות דרגת הנקודה והטענה. אכן,

$$d_a^2 - R^2 = \mathrm{KM} \cdot \mathrm{KA} = \mathrm{BM} \cdot \mathrm{KA} = 2R \sin\tfrac{\alpha}{2} \cdot \frac{r_a}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2Rr_a$$

נשאר להוכיח את הטענה.

הוכחת הטענה. הזווית AMB שווה לזווית ACB כלומר ל-γ. הזווית MBK היא הפרש CBK – CBM. אבל CK היא חוצה זווית חיצוני של ABC, לכן $\mathrm{CBK} = 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$.

זוויות שנשענות על אותה קשת שוות, לכן $\mathrm{CBM} = \mathrm{CAM} = \dfrac{\alpha}{2}$.

לכן $\mathrm{MBK} = 90^\circ - \dfrac{\beta}{2} - \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\gamma}{2}$. כבר חישבנו זווית חיצונית במשולש MBK, הרי AMB שווה ל-γ.

סכום של שתי זוויות פנימיות במשולש שווה לזווית חיצונית, לכן גם $\mathrm{MKB} = \dfrac{\gamma}{2}$.

כלומר משולש MBK שווה שוקיים, MK = MB, מש"ל.

4. במרובע קמור ABCD, נקודות M, N הן אמצעים של AB, CD, ו-X היא נקודת חיתוך האלכסונים. הוכח כי אם CD + AB < 2MN אז הזווית AXB חדה.

פתרון. נצייר שני עיגולים, שקוטריהם AB ו-CD (ומרכזיהם M ו-N). הם לא נחתכים, כי המרחק בין המרכזים גדול מסכום רדיוסיהם. לכן כל נקודה שרואה את AB בזווית כהה או ישרה רואה את CD בזווית חדה.

לכן X רואה את AB בזווית חדה, כי היא רואה את CD באותה הזווית.

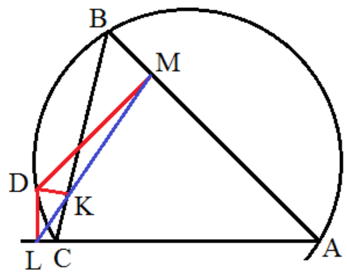
5.* **א.** נקודה D נמצאת על המעגל החוסם של משולש ABC. הוכח כי עקבי האנכים מ-D לצלעותיו של נקודה ABC נמצאים על ישר אחד.

ב. ABCD מרובע חסום, E נמצאת על המעגל החוסם שלו.

המרחקים מ-E לישרים AB, BC, CD, DA הם k, l, m, n בהתאמה.

הוכח כי $km = ln$.

פתרון. א. נניח ללא הגבלת הכלליות ש-D נמצאת על הקשת BC. עקבי האנכים מ-D על הישרים AB, AC, BC בהתאמה יסומנו M, L, K.



הזווית BDC משלימה ל- 180º את הזווית BAC, לכן היא שווה לזווית LDM.

לכן אם M נמצא באותו צד של B כמו A, אז L נמצא על המשך של AC מאחורי C (או הפוך, אבל ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות שזה המקרה הזה).

מספיק להוכיח שהזוויות LKC, BKM שוות (הרי הזווית BKC היא 180º, אז נסיק שהזוויות LKM היא גם 180º, וזה מה שאנו רוצים להוכיח).

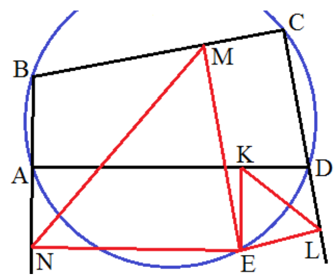
מעגל שקוטרו DC מכיל נקודות K, L לכן הזוויות LKC, LDC שוות.

כבר הוכחנו שזוויות LDM, CDB שוות, נחסיר משניהם זווית CDM, ונראה שהזווית LDC שווה לזווית MDB.

מעגל שקוטרו BD מכיל נקודות K, M לכן זוויות MDB, MKB שוות. ובכן

MKB = MDB = LDC = LKC

מש"ל.



ב. בציור E נמצא על קשת AD, ואפשר להניח ללא הגבלת הכלליות שזה המצב. עקבי האנכים מ-E לצלעות המרובע הם K, L, M, N בסדר זה (כמו בציור). אנחנו נוכיח שמשולשים LEK , MEN דומים, מזה יתקבל ישירות כי EM/EN = EL/EK, וזה מש"ל.

את הדמיון של המשולשים נוכיח באמצעות חשבון זוויות.

מעגל שקוטרו ED מכיל נקודות K, L לכן זוויות ELK, EDK שוות. אבל EDK נשענת על AE במעגל המקורי, לכן היא שווה לזווית ABE. אבל מעגל שקוטרו EB מכיל נקודות M ו-N, לכן זווית NME = NBE = ABE. ובכן, זוויות NME, ELK שוות.

באופן דומה מוכיחים כי EKL = ENM, וזה משלים את הוכחת הדמיון.