

## תרגיל 1 - עקרון שובך היונים

עקרון שובך היונים הוא עקרון יחסית נאיבי, ועם זאת חשוב. הניסוח המקובל שלו אומר שאם יש  $n$  שובכים ו- $n+1$  יונים אז בהכרח ישנו שובך שבו יש לפחות שתי יונים. ניסוח חלופי הוא שאם יש  $n$  עמדות שמירה ו- $n+1$  שומרים, אז ישנה עמדה שבה שומרים לפחות שני שומרים. עקרון שובך היונים ניתן גם להכללה, כך שאם יש  $n$  עמדות שמירה ו- $kn+1$  שומרים אז ישנה עמדה שבה לפחות  $k+1$  שומרים.

(1) במסיבה יש 5771 אנשים. כל אחד מכיר חלק מהאנשים, כאשר אם אדם א' מכיר את אדם ב' אז גם אדם ב' מכיר את אדם א'. הוכח שקיימים שני אנשים שמכירים את אותו מספר של אנשים.

(2) בריבוע שצלעו 1 סימנו 5 נקודות. הוכח שיש זוג נקודות שהמרחק ביניהן אינו עולה על  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

(3) רושמים בשורה 31 מספרים. הוכח שניתן לבחור מתוכם רצף מספרים סמוכים, שסכומם מתחלק ב-31.

(4) נתון ריבוע, ובנוסף 4321 משולשים משוכללים שחסומים בו (כל שלושת הקודקודים של כל משולש נמצאים על שפת הריבוע). הוכח שקיימת קבוצה של 1081 משולשים שנחתכים בנקודה אחת לפחות.

(5) בחרו וקטורים  $v_1, v_2, \dots, v_{2003}$  במרחב תלת מימדי, כאלה שכל הקואורדינטות של כל וקטור נמצאות בתחום  $[-1, 1]$ . הוכח שבביטוי  $\pm v_1 \pm v_2 \pm \dots \pm v_{2003}$  אפשר לבחור סימנים כך, שאורך הווקטור שיתקבל יהיה קטן מ-10.

(6) נתונים  $n > 2$  מעגלים שרדיוסיהם 1 ומרכזיהם  $O_1, O_2, \dots, O_n$ . אף ישר לא חותך יותר משתי מעגלים נתונים. הוכח כי  $\sum_{i < j} \frac{1}{O_i O_j} < \frac{n\pi}{4}$ .