אולימפיאדה ארצית במתמטיקה – שלב א' – פתרונות

1. עשרים אנשים עומדים בטור, בזה אחר זה. כל אחד מהם הוא או שקרן או דובר אמת (השקרנים תמיד משקרים, ודוברי האמת תמיד אומרים את האמת). כל אחד מהאנשים אומר שיותר שקרנים עומדים לפניו מאשר מאחוריו. כמה מבין העשרים הם דוברי אמת?

תשובה: 19.

פתרון ראשון: נתבונן באדם שעומד בראש הטור. כיוון שלא עומד לפניו אף אחד, לא יכול להיות שעומדים לפניו יותר שקרנים מאשר מאחוריו, ולפיכך הוא שקרן. מכאן שהאדם האחרון דובר אמת (מאחוריו אין שקרנים ולפניו יש לפחות אחד). אותו דבר נכון גם לגבי האדם שלפניו, וכך הלאה עד ראש הטור. מכאן שכולם למעט הראשון הם דוברי אמת.

פתרון שני: נתבונן בשקרן האחרון בתור. מאחריו אין שקרנים, לכן גם לפניו אין. לכן יש לכל היותר שקרן אחד. שקרן אחד לפחות חייב להיות, כי הראשון בתור הוא כמובן שקרן.

2. בשעה 12:00 מחוגי השעון מתלכדים. כמה זמן יעבור עד שהמחוגים יהיו מאונכים זה לזה בפעם הראשונה? (המחוגים נעים ברציפות, במהירויות קבועות)

תשובה: $\frac{3}{11}$ שעות (או $t=\frac{180}{11}$ דקות).

פתרון ראשון: נחשב קצב של כל מחוג: המחוק הקטן משלים סיבוב 720 דקות (12 שעות) ולכן בדקה הוא זז $\frac{360^0}{720}=\frac{1}{2}^0$ המחוג הקטן משלים סיבוב ב 60 דקות (אותו חישוב) בדקה הוא זז 6^0.

נסמן ב t את מספר הדקות ולכן: $6^0t-\frac{1}{2}^0t=90^0$ פתרון המשוואה: $t=\frac{180}{11}$ דקות.

פתרון שני:

במהלך 12 שעות, מחוג הדקות מבצע 12 סיבובים, ומחוג השעות – סיבוב אחד. לכן מחוג הדקות משיג את מחוג השעות 11 פעמים, וזה קורה במרווחים קבועים $\frac{12}{11}$ של שעות. זה הזמן שלוקח למחוג הדקות להסתובב ב-$360°$ יחסית למחוג השעות. הזמן שלוקח למחוג הדקות להסתובב ב-$90°$ יחסית למחוג השעות הוא, אם כן, רבע מזה, וזה $\frac{3}{11}$ שעות.

3. נניח ש- x, y, z מספרים חיוביים שסכומם 1. מהו הערך הקטן ביותר שיכול לקבל המספר הגדול מבין $\frac{x}{5},\frac{y}{7},\frac{z}{11}$?

תשובה: $\frac{1}{23}$.

פתרון: יש מצב שבו $\frac{x}{5},\frac{y}{7},\frac{z}{11}$ כולם שווים. במצב זה $x_0=\frac{5}{23}, y_0=\frac{7}{23}, z_0=\frac{11}{23}$

ואז $\frac{x_0}{5}=\frac{y_0}{7}=\frac{z_0}{11}=\frac{1}{23}$.

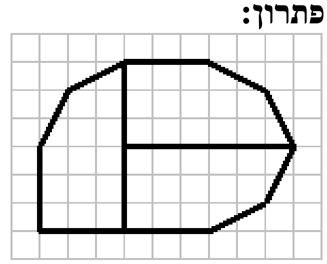
באף מצב אחר שבו $x+y+z=1$ לא יתכן שבו-זמנית $x<x_0$ וגם $y<y_0$ וגם $z<z_0$ (הרי אז היינו מקבלים $x+y+z<x_0+y_0+z_0=1$ וזה לא יתכן).

לכן לא יתכן שבו-זמנית $\frac{1}{23}<\frac{x}{5}$ וגם $\frac{1}{23}<\frac{y}{7}$ וגם $\frac{1}{23}<\frac{z}{11}$.

לכן בכל הערך הקטן ביותר מבין $\frac{x}{5},\frac{y}{7},\frac{z}{11}$ הוא לפחות $\frac{1}{23}$.

4. חלק את הצורה שבציור לשלושה חלקים שווים בשטחם ובצורתם.

פתרון:



5. בקרקעיתו של אגם יש מעיינות המזרימים אליו מים בקצב קבוע. עדר של 183 פילים יכול לרוקן את האגם ביום אחד. עדר של 37 פילים יכול לרוקן אותו בחמישה ימים. כמה זמן ייקח לפיל בודד לרוקן את האגם?

תשובה: שנה.

פתרון: המעיינות מזרימים M מים ביום. פיל שותה P מים ביום. בהתחלה יש באגם A מים. X זה מספר הימים שיקח לפיל בודד לרוקן את האגם. אז מתקבלים משוואות:

$$M + A = 183P$$
$$5M + A = 5\cdot 37P = 185P$$
$$X\cdot M + A = X\cdot P$$

נחסר בין את המשוואה הראשונה מהשנייה ונקבל: $4M = 2P$. לכן $2M = P$.

נציב את P במשוואה ראשונה ובשלישית ונקבל:

$$M + A = 366M$$
$$X\cdot M + A = 2X\cdot M$$

נצמצם בשני המשוואות האחרונות ונקבל:

$$A = 365M$$
$$A = X\cdot M$$

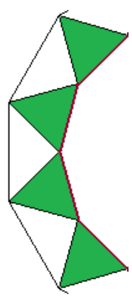
מכאן $X = 365$. כלומר פיל בודד מרוקן את האגם ב-365 ימים שזה בערך שנה.

6. המורה חילקה (עם שארית) את מספר התלמידים בשכבה ב-2, ב-3, ב-4, ב-5 וב-9. כשסיכמה את השאריות, קיבלה 18. מצא את מספר התלמידים בשכבה, אם ידוע שהמספר קטן מ-300.

תשובה: 179.

פתרון: נסמן את כמות התלמידים ב-N. השארית המירבית האפשרית בחלוקה ל-9 היא 8, השארית המירבית בחלוקה ל-5 היא 4, בחלוקה ל-4 היא 3, בחלוקה ל-3 היא 2, ובחלוקה ל-2 היא 1. הסכום של כל אלה הוא בדיוק 18, ולכן אלו חייבות להיות השאריות בחלוקה. לחלופין, אפשר לומר כי N+1 מתחלק ב-2, ב-3, ב-4, ב-5, וב-9, ומכאן שהוא מתחלק בכפולה המשותפת המינימאלית של כולם שהיא 180. לכן N+1 הוא 180, כי המספר הבא שמתחלק ב-180 גדול מ-300. לכן $N = 179$.

7. נתון מצולע משוכלל. על כל צלע בונים משולש ישר זווית ושווה-שוקיים, כך שהצלע היא היתר של המשולש, וקודקוד הראש בפנים המצולע. מחברים את קודקודי הראש של כל המשולשים ומקבלים מצולע (משוכלל, בעל אותו מספר צלעות). כמה צלעות יש למצולע המקורי, אם שטחו של המצולע שהתקבל הוא חצי משטח המצולע המקורי?



תשובה: 12.

פתרון: כאשר צלעות של מצולע אחד גדולים פי A מהצלעות המתאימות של המצולע הגדול שדומה לו, אז יחס השטחים הוא A^2. במקרה שלנו שטח המצולע הקטן הוא חצי משטח המצולע המקורי, אז צלעו קטנה פי $\sqrt{2}$ מהצלע של המצולע המקורי. מצד שני, גם שוקי המשולשים ישרי הזווית קטנות פי $\sqrt{2}$ מהצלע של המצולע המקורי, ומכאן שהמשולשים שבין צלעות המצולע הקטן לקודקודי המצולע המקורי (המשולשים הירוקים בציור) הם שווי צלעות, כך שכל זוויותיהם הן $60°$ מעלות. לפיכך זוויות המצולע המקורי הן $45°+60°+45°=150°$, כלומר הזוויות החיצוניות הן $30°$. ידוע שסכום הזוויות החיצוניות של מצולע הוא $360°$, לכן למצולע שלנו $360° / 30° = 12$ צלעות.

8. מצא את כל הזוגות x , y של מספרים שלמים, המקיימים את המשוואה

$$x + y = x^2 + xy + y^2$$

תשובה: $x = 0, y = 0$; $x = 1, y = 0$; $x = 0, y = 1$.

פתרון: נכפול את המשוואה ב-2:

$$2x + 2y = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$
$$0 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 2y$$
$$2 = (x + y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2$$

סכום של שלושה ריבועים שלמים שווה ל-2, זאת אומרת ששניים מהם שווים ל-1, והשלישי ל-0. לכן צריכים לבדוק 3 מקרים - בהתאם לאיזה ריבוע שווה ל-0.

א. $x + y = 0$, $|x - 1| = 1$, $|y - 1| = 1$

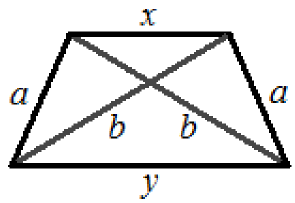
אז גם x וגם y הם 0 או 2. הדרך היחידה לגרום לכך שסכומם יהיה 0 זה $x = y = 0$.

ב. $|x + y| = 1$, $x - 1 = 0$, $|y - 1| = 1$

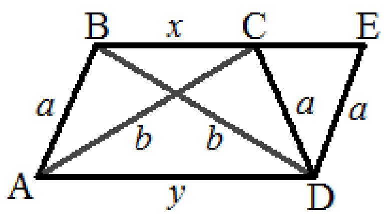
אז $x = 1$, ואילו y יכול להיות 0 או 2, וכדי שנקבל $|x + y| = 1$ צריך להתקיים $y = 0$.

ג. $|y-1| = 0$, $|x-1| = 1$, $|x+y| = 1$
באופן דומה למקרה ב', מקבלים $y = 1$, $x = 0$.
בדיקה פשוטה מראה ששלושת התשובות שמצאנו מקיימות את המשוואה המקורית.

9. נתון טרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שלו a, ואורך האלכסון שלו b, כמו בציור. מצא את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר שיכולה לקבל מכפלת הבסיסים (התשובה תלויה ב-a וב-b).

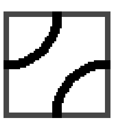


תשובה: המרחק שווה $b^2 - a^2$ בכל מקרה (גם המקסימלי, וגם המינימלי).



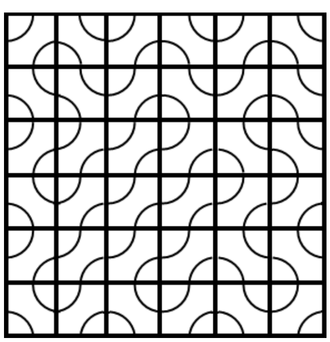
פתרון ראשון: נסמן את קודקודי הטרפז A, B, C, D (הבסיסים הם AD ו-BC). תהי E נקודה נוספת כזאת ש-ABED מקבילית. אז קל לראות כי $DC = DE = a$.
ניקח מעגל שמרכזו D ורדיוסו a. הוא עובר דרך E, C.
ישר BE חותך את המעגל במרחקים y , x מנקודה B.
ישר BD חותך אותו במרחקים $b - a$, $b + a$ מנקודה B.
לכל ישר שעובר דרך B, מכפלת המרחקים מהנקודה B לשתי נקודות החיתוך שלו עם המעגל היא אותו דבר. לכן $(b+a)(b-a) = xy$, כלומר $b^2 - a^2 = xy$.

פתרון שני. בטרפז שלנו אורכי הצלעות לפי כיוון השעון הם y, a, x, a, ושני אלכסוניו באורך b. טרפז שווה שוקיים תמיד חסום במעגל. לכן לפי משפט פתולמאוס (תלמי), מקבלים $b^2 = a^2 + xy$. לכן בכל מקרה $b^2 - a^2 = xy$.



10. נתון לוח בגודל של 6 על 6 מרצפות ריבועיות. מרצפים אותו ב-36 מרצפות, שעל כל אחת מהן מצויירים שני רבעי מעגל המחברים את האמצעים של צלעות צמודות, כמו בציור. מהו המספר הגדול ביותר של רבעי מעגל שיכולים להתחבר לקו רציף אחד? צייר דוגמא המכילה קו כזה.

תשובה: 54.



פתרון: ניקח קו רציף מסוים, ונספור כמה רבעי מעגל לא יכולים להשתתף בו. יש 20 משבצות בשפת הלוח, ועל כל משבצת כזאת יש קשת שנוגעת בשפת הלוח. רק 2 מהן יכולות להשתתף בקו נתון, ו-18 הן מבוזבזות. לכן מתוך $2 \cdot 36 = 72$ רבעי מעגל, נשארים רק 54.
כפי שניתן לראות בשרטוט, אכן ניתן לבנות קו שמכיל 54 רבעי מעגל.