**פולינומים – תרגיל לבואנוס איירס**

**1.** יהיה $P(x)$ פולינום. האם יתכן שמקדמי הפולינום $Q(x)=P(x)\cdot(x-1)$ כולם חיוביים?

**2.** פולינום יקרא ***נחמד*** אם סכום המקדמים האי-זוגיים שלו שווה לסכום המקדמים הזוגיים. במילים אחרות $P(x)=a_nx^n+...+a_2x^2+a_1x+a_0$ נחמד אם $a_0+a_2+a_4+...=a_1+a_3+a_5+...$.

נניח כי הפולינומים $P(x),Q(x)$ נחמדים. האם אפשר להוכיח שפולינום $P(x)+Q(x)$ נחמד?

האם אפשר להוכיח שפולינום $P(x)Q(x)$ נחמד?

אותן שאלות כאשר $P(x)$ נחמד אבל $Q(x)$ לאו דווקא נחמד.

(אם אתם טוענים שפולינום בהכרח נחמד, צריך להוכיח את זה, ואם לא – להראות דוגמה נגדית.)

**3.** נתון כי 5 הוא שורש של פולינום $P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+1$. הבא\י שורש אחד של פולינום $Q(x)=x^5+dx^4+cx^3+bx^2+ax+1$ (באמצעות $a,b,c,d$ ומספרים ממשיים).

**4.** נתבונן בפולינום $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ ששורשיו $x_1,x_2,...,x_n$ וגם מקדמיו הם מספרים מרוכבים. נתבונן גם בפולינום $Q(x)=x^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0$ ששורשיו הם $x_1^2,x_2^2,...,x_n^2$.

נניח כי $a_0+a_2+a_4+...$ וגם $a_1+a_3+a_5+...$ ממשיים. הוכיחו כי $b_0+b_1+b_2+...+b_{n-1}$ ממשי.

**5.** האם הפולינום $x^{2011}+x^{200}+2x^{72}-5$ מתחלק בפולינום $x^7+x^3-2$ ?

**6.** האם קיים פולינום עם מקדמים שלמי עבורו $p(7)=5$ , $p(11)=7$ ?

**7.** האם פולינום ריבועי מהצורה $ax^2+bx+c$ , שמקבל ערכים שלמים לכל $x$ שלם, הוא בהכרח בעל מקדמים שלמים? אם כן, הוכח\י. אם לא, הבא\י דוגמא נגדית, ומצא\י תנאי הכרחי ומספיק על $a$, $b$, $c$ כדי שלכל $x$ שלם גם $ax^2+bx+c$ יהיה שלם.

**8.** יהי $k>0$ מספר חיובי שלם.

(א) מצא\י פולינום $P_k(x)$ ממעלה מינימלית, עבורו

$$\begin{cases} P_k(0)=P_k(1)=P_k(2)=...=P_k(k-1)=1 \\ P_k(k)=0 \end{cases}$$

<u>שימו לב:</u> לא דורשים שמקדמים יהיו שלמים
עבור $k=0$ התנאי הראשון הוא ריק

(ב) כיצד $P_k(x)$ קשור למקדמים בינומיאליים?

(ג) להוכיח כי $P_k(x)$ הוא בעל ערכים שלמים בנקודות שלמות.

(ד) להוכיח כי פולינום $Q(x)$ הוא בעל ערכים שלמים לכל $x$ שלם אם ורק אם קיימים $c_0,c_1,...,c_k$ שלמים (עבור $k$ מסוים)כך ש-$Q(x)=c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+...+c_kP_k(x)$.

**9.** מצא\י פולינום $P(x)$ בעל מקדמים שלמים ודרגה מינימלית, כך ש-$P\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=0$ עבור מספרים שלמים נתונים $a$, $b$ (לבטא את מקדמי הפולינום דרך $a$, $b$).

להסיק מכאן, מתי $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ רציונלי (זה תלוי ב-$a$, $b$ כמובן).

**פולינומים – תרגיל סופ"ש לבואנוס איירס**

**1. א.** מהי השארית שמתקבלת מחלוקה של פולינום $\left(x^{2011}-1\right)$ ב-$\left(x^{41}-1\right)$ ?

**ב.** מצא את המחלק המשותף המקסימלי של $10^{5771}-1$ ושל $10^{1990}-1$.

**2.** מצא פולינום $P\left(x\right)$ שמקיים $P\left(x+1\right)-P\left(x\right)=x^2$ לכל $x$.

חשב את הסכום $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ לכל $n$.

**3.** חשב\י את המקדמים של $x^2$, של $x$ ושל 1 של הפולינום

$$P_n\left(x\right)=\underbrace{\left(\ldots\left(\left(\left(x-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-\ldots-2\right)^2}_{n\text{ פעמים}}.$$

**4.** יהיה $p(x)$ פולינום. נתבונן בסדרות הבאות:

סדרה ראשונה: $p\left(0\right),p\left(1\right),p\left(2\right),p\left(3\right),\ldots$ (ערכי $p$ בנקודות שלמות אי-שליליות).

סדרה שנייה: $p\left(1\right)-p\left(0\right),p\left(2\right)-p\left(1\right),p\left(3\right)-p\left(2\right),\ldots$

סדרה שלישית: $p\left(2\right)-p\left(1\right)-\left(p\left(1\right)-p\left(0\right)\right),p\left(3\right)-p\left(2\right)-\left(p\left(2\right)-p\left(1\right)\right),\ldots$

וכו' - כל סדרה מתקבלת מהסדרה הקודמת על ידי לקיחת הפרשים של מספרים עוקבים.

הוכח\י, שבשלב מסוים תתקבל סדרה שמורכב אך ורק מאפסים?

**5.** $p\left(x\right)$ הוא פולינום עם מקדמים שלמים. נתון כי קיימים 3 מספרים שלמים **שונים** $a,b,c$ כאלה ש-$p\left(a\right)=p\left(b\right)=p\left(c\right)=1$. הוכח כי ל- $p$ אין שורשים שלמים.

**פולינומים – תרגיל לאמסטרדם**

**1.** האם פולינום ריבועי מהצורה $ax^2 + bx + c$ , שמקבל ערכים שלמים לכל $x$ שלם, הוא בהכרח בעל מקדמים שלמים? אם כן, הוכח\י. אם לא, הבא\י דוגמא נגדית, ומצא\י תנאי הכרחי ומספיק על $a, b, c$ כדי שלכל $x$ שלם גם $ax^2 + bx + c$ יהיה שלם.

**2.** יהי $k > 0$ מספר חיובי שלם.

(א) מצא\י פולינום $P_k(x)$ ממעלה מינימלית, עבורו

$$\begin{cases} P_k(0) = P_k(1) = P_k(2) = \ldots = P_k(k-1) = 0 \\ P_k(k) = 1 \end{cases}$$

<u>שימו לב:</u> לא דורשים שמקדמים יהיו שלמים
עבור $k = 0$ התנאי הראשון הוא ריק

(ב) כיצד $P_k(x)$ קשור למקדמים בינומיאליים?

(ג) להוכיח כי $P_k(x)$ הוא בעל ערכים שלמים בנקודות שלמות.

(ד) להוכיח כי פולינום $Q(x)$ הוא בעל ערכים שלמים לכל $x$ שלם אם ורק אם קיימים $c_0, c_1, \ldots, c_k$ שלמים (עבור $k$ מסוים) כך ש- $Q(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_k P_k(x)$.

**3.** נתון פולינום $P(x)$ ומספרים שונים בזוגות $a, b, c$. בחלוקה עם שארית של $P(x)$ בפולינומים $x - a$ , $x - b$ , $x - c$ מתקבלת שארית $a^2$ , $b^2$ , $c^2$ בהתאמה.
מהי השארית של חלוקה של $P(x)$ בפולינום $(x - a)(x - b)(x - c)$ ?

**4.** (א) להוכיח כי לפולינומים $x^2 + 3x - 3$ , $x^5 + 5x + 2$ אין שורשים משותפים.

(ב) למצוא שורשים משותפים לפולינומים

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 35x - 33 \\ Q(x) &= x^4 - x^3 + 4x^2 - 23x - 21 \end{aligned}\right\}.$$

**5.** הוכח כי לא קיים פולינום $P(x, y)$ בשני משתנים כך ש-

(א) $P$ אינו פולינום ה-0 (כלומר, הוא לא 0 זהותית)

(ב) לכל $t$ ממשי, $P(t, \sin t) = 0$.

**6.** יהי $P(z)$ – פולינום עם מקדמים מרוכבים במשתנה אחד. בעל דרגה $n$. תהיינה $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}$ - נקודות במישור המרוכב אשר מהוות קודקודים של מצולע משוכלל בעל $n + 1$ קודקודים. יהי $\alpha$ מרכז של המצולע. הוכח כי $P(\alpha) = \dfrac{P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \ldots + P(\alpha_{n+1})}{n+1}$.

**7.** מצא\י את כל הפולינומים מהצורה $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ עבורם $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ וכל השורשים של הפולינום – ממשיים.

**8.** (זהויות ניוטון.) נסמן עבור משתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$s_k := x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$ לכל $k \ge 1$ (סכומי חזקות).

$\sigma_k := \sum\limits_{\substack{\{i_1,\ldots,i_k\} \subset \{1,\ldots,n\} \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_k}} x_{i_1} x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}$ לכל $k \ge 1$ (פולינומים סימטריים אלמנטאריים ב- $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

אז מתקיים:

$\boxed{k\sigma_k = s_1\sigma_{k-1} - s_2\sigma_{k-2} + s_3\sigma_{k-3} - \ldots + (-1)^k s_{k-1}\sigma_1 + (-1)^{k-1} s_k}$ עבור $1 \le k \le n$.

$\boxed{s_m = s_{m-1}\sigma_1 - s_{m-2}\sigma_2 + s_{m-3}\sigma_3 - \ldots + (-1)^n s_{m-n}\sigma_n}$ עבור $m \ge n$.

**9.** נניח כי עבור מספרים מרוכבים $z_1, z_2, \ldots, z_k$ מתקיים $z_1^m + z_2^m + \ldots + z_k^m = n$ לכל $m = 1, 2, \ldots, k$

(כאן $k, n$ מספרים שלמים חיוביים <u>קבועים</u>).

הוכיחו: $(x - z_1)(x - z_2) \cdot \ldots \cdot (x - z_k) = x^k - \binom{n}{1} x^{k-1} + \binom{n}{2} x^{k-2} - \ldots + (-1)^k \binom{n}{k}$.