12/1/2011

הרצאה על פולינומים I: פולינומים בשלמים וחלוקה עם שארית:

פולינומים שלמים

שאלה: האם תוכלו למצוא פולינום p עם מקדמים שלמים כך ש- $p(0)=1,\ p(1)=4,\ p(2)=6$?

פתרון: לא! כי 6-1 לא מתחלק ב-2.

מסקנה: הדבר הכי חשוב שאתם צריכים לדעת על פולינומים במקדמים שלמים הוא: $(y-x)$ מחלק את $p(x)-p(y)$!

שאלה: נניח שסדרה חשבונית מכילה ערך של פולינום שלם. הוכח שהיא מכילה אינסוף כאלה

פתרון: אם $p(x)=a_0+n_0d$ אז $p(x+kd)-p(x)$ מתחלק ב-d ולכן כל תמונת סדרה חשבונית מתאימה מקיימת את הדרוש.

שאלה: האם יש פולינום p שמקבל רק ערכים ראשוניים?

תשובה: לא, כי אם למשל $p(k)$=3 ראשוני אז כל ה- $p((3n+1)k)$ ראשוניים אבל ההפרש מתחלק ב-3 לכן זה בהכרח 3 ויש רק מס' סופי של פתרונות ל-$p(x)$ = 3...

חלוקה עם שארית ופריקות של פולינומים

האם ניתן לחלק את x^4+7x^2-6 ב-$x-1$?

לא, אבל אפשר לחלק עם שארית! השארית תהיה פשוט $p(1)$.

הסבר על הלוח איך לבצע את החלוקה, ובדיקה שיוצאת באמת שארית של $p(1)$

מסקנה: $p(x)-p(a)$ מתחלק ב- $x-a$.

והנה על הדרך הוכחנו את הטענה הכי חשובה על פולינומים בשלמים!

טענה: אם a/b שורש רציונלי של פולינום p אז a מחלק את המקדם החופשי ו-b את המקדם המוביל.

בפרט: לפולינום מתוקן בשלמים רק שורשים שלמים או אי-רציונליים.

דוגמאות:

שאלה: פרק לגורמים מעל Q את $p(x)=x^3-6x^2+11x-6$.

פתרון: קל לראות כי 1 שורש! נחלק עם שארית ונקבל:
$p(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$. כעת, שורש רציונלי של הגורם השני יהיה משהו מבין: $\pm1,\pm3,\pm6$ ו-2-+, וקל לוודא ש-3 ו-2 שורשים. סה״כ
$p(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$.

טענה: $\frac{x^p-1}{x-1}=1+\ldots+x^{p-1}$ הוא פולינום אי פריק.

הוכחה: נציב $x=y+1$ ונקבל $f(y)=\frac{(y+1)^p-1}{y}=y^{p-1}+py^{p-2}+\frac{p(p-1)}{2}y^{p-3}\ldots+p$.
עכשיו נניח שפירקנו כבר: $f(y)=h(y)g(y)$ ונחשב מודולו p. אז $f=y^p$ ולכן פירוק הוא חזקות של y וזה לא ייתכן כי אז היינו מקבלים כי המקדם החופשי של h,g מתחלק ב-p אבל המקדם החופשי של f לא מתחלק ב-p^2.

מסקנה: קריטריון אייזנשטיין: אם כל המקדמים מתחלקים ב-p אבל החופשי לא ב- p^2, והמקדם המוביל זר ל-p הפולינום אי פריק.

הלמה של גאוס: אם p פריק מעל Q הוא פריק מעל Z.
ההוכחה דומה. נרשום פירוק $p=gh$ ונוציא מכנה משותף מאגף ימין. אז $Ap=g'h'$ מעל לשלמים. ניקח גורם ראשוני q של A ונחשב מודולו q. נקבל ש- q חייב לחלק את אחד הגורמים כי אחד מהם חייב להיות 0. נצמצם את p ונמשיך.

המשפט היסודי של האלגברה: לכל פולינום ב-C יש שורש. יש הרבה הוכחות וכולן לא אלמנטאריות. מי שמעניין אותו שיחפש בוויקי.

הרצאה II: נוסחאות וויטא ופולינומים סימטריים:

נוסחאות וויטא: נניח שיש לנו פולינום . $p(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ אנחנו יודעים שאם c שורש אז p מתחלק ב- x-c. לכן אם $x_1,\dots,x_n$ כל השורשים אז $p(x)=a_n\prod_i(x-x_i)$.

כלומר: אם למשל a_n=1:

$$
\begin{aligned}
&-a_{n-1}=x_1+\dots+x_n\\
&a_{n-2}=x_1x_2+\dots+x_{n-1}x_n\\
&.\\
&.\\
&.\\
&(-1)^n a_0=x_1x_2\dots x_n
\end{aligned}
$$

ואלה נוסחאות וויטא! (Viete):

דוגמא: נניח כי a,b,c שלמים ושונים מ-0 ככה ש- $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ וכן $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$ שניהם שלמים. הראו כי $|a|=|b|=|c|$.

פתרון: נתבונן ב-

$$p(x)=\left(x-\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{b}{c}\right)\left(x-\frac{c}{a}\right)=x^3-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)x^2+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)x-1$$

זהו פולינום מתוקן במקדמים שלמים, לכן כל שורשיו הרציונליים הם שלמים שמחלקים את 1-, כלומר 1 או 1-.

פתרון: קודם כל, $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)$ ולכן מ-1 ו-2 נובע כי אם p, q פולינומים עם השורשים x_i, y_i בהתאמה, הם נבדלים רק באיבר החופשי, כלומר הגרף של האחד מוזז בציר y ביחס לגרף של השני. עכשיו נצייר את הגרפים, הם חותך את הצירים ב-3 נק'. בגלל ש-$x_1 < y_1$ ניתן להסיק כי הגרף של p נמצא מתחת לגרף של q. לכן $y_3 < x_3$...

לנוסחאות וויטא יש גם שימושים יפים בגאומטריה:

דוגמא: יש תכונה משותפת יפה לכל העקומות מדרגה 2 במישור, אליפסות פרבולות והיפרבולות. לכל משפחה של קווים מקבילים שחותכים עקומה כזו (ב-2 נק'), מרכזי הקטעים שמוקצים עליהם נמצאים על ישר אחד.

אפשר להוכיח לכל אחד לחוד אבל יש הוכחה כללית פשוטה לכולן יחד בעזרת נוסחאות וויטא!

משוואה כללית מדרגה 2 : $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$. נסובב ככה שהישרים יהיו מהצורה $y=\delta$. נציב ונמצא את ערכי ה-x של המרכזים : $ax^2+bx\delta+dx+...=0$ ומה שמעניין אותי זה רק המקדם של x!

הרי $(x_1+x_2)/2=-"a_1/a_2"/2=(-b\delta-d)/a$ אבל זו פונקציה לינארית ב-y (כלומר ב- δ), וסיימנו.

עוד דוגמא ☺: נתון מצולע משוכלל החסום במעגל בעל רדיוס 1. מהי מכפלת כל המיתרים העוברים באחד הקודקודים?

(כאן לתת כמה דוגמאות לפני!)

פתרון: הקודקודים הם שורשי המשוואה $z^n-1=0$, אבל כאן אנחנו מחשבים סביב קודקוד לכן נציב $z+1$. עכשיו צריך לחלק ב-z כי אנחנו לא מתייחסים לקודקוד ממנו יוצאים המיתרים. נקבל:
$z^{n-1}+\ldots+n$. מנוסחאות וייטא מכפלת השורשים היא עד כדי סימן n, לכן מכפלת אורכיהם היא n.

שאלה למחשבה: אם עכשיו נסתכל על הקטעים שמחברים נק' על המשך הקוטר, נניח במרחק 1 מהמעגל, מה תהיה מכפלתם?

יש כאן עיקרון כללי שמאוד חשוב לדעת :

פונקציות סימטריות וזהויות ניוטון:

מה שעשינו בדוגמא האחרונה הוא מקרה פרטי של משהו מאוד חשוב :

פונקציה סימטרית : לדוגמא : $(x+y+z)(x^2y+y^2z+z^2x)$, כזו שסימטרית ביחס לכל המשתנים שלה.

יש 2 משפחות חשובות : הסיגמות וה-S-ים :

$$\sigma_k(x_1,..,x_n)=\sum_{i_1<..<i_k} x_{i_1}...x_{i_k}$$
$$S_k(x_1,..,x_n)=\sum_i x_i^k$$

לדוגמא :
$$\sigma_2(x,y,z)=xy+xz+yz$$
$$S_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

משפט: כל פולינום סימטרי הוא פולינום בסיגמות.

זה בדיוק מה שעשינו בשאלה האחרונה :

שלבים בפירוק:
1. מסדרים מונומים $x_1^{a_1}...x_n^{a_n}$ לפי סדר לקסיקוגרפי. כלומר כמו במילון. (לתת הסבר על הלוח!)
2. בוחרים מונום מקסימלי, $x_1^{a_1}...x_n^{a_n}$.
3. מפרקים אותו הפעם "לרוחב" ולא "לאורך", כלומר רושמים אותו ככה: $(x_1...x_n)^{a_1}(x_2...x_n)^{a_2-a_1}...x_n^{a_n}$.
4. מחסרים ומוסיפים כפולה מתאימה של $\sigma_n^{a_1}\sigma_{n-1}^{a_2-a_1}...\sigma_1^{a_n-a_{n-1}}$.
5. ממשיכים עם מה שנשאר.

זה פשוט דרך מסובכת לרשום את מה שעשינו בדוגמא האחרונה, בכל מקרה ספציפי לא קשה למצוא את הפירוק.

אי-השוויונים של ניוטון ומקלורן:

אם $m_k = \sqrt[k]{\frac{\sigma_k}{\binom{n}{k}}}$ אז

1. $m_1 \le m_2 \le ... \le m_n$ (מקלורין)
2. $\frac{m_{k+1}^{k+1}}{m_k^{k}} \le \frac{m_k^{k}}{m_{k-1}^{k-1}}$ (ניוטון)

למעשה 2 נובע מ-1. אכן, 2 שקול ל- $\left(\frac{m_{k+1}}{m_k}\right)^{k+1} \le \left(\frac{m_k}{m_{k-1}}\right)^{k-1}$ מאי שוויון הממוצעים $m_{n-1} \ge m_n$ ולכן יחד עם אי השוויון האחרון נסיק את כל אי-השוויונות ב-1.

נשאר להוכיח את 2. הרעיון הוא כזה. נתבונן בפולינום
$p(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n)$. יש לו n שורשים ממשיים חיוביים. לכן גם ל- $p'(x)$ יש n-1 שורשים ממשיים וגם ל-$x^n p(1/x)$ יש n שורשים.
ע"י פעולות כאלה אפשר "לחסל" את כל המקדמים ולקבל

$$Aa_{k+1}x^2 + Ba_k x + Ca_{k-1} = 0$$

A,B,C מקדמים שלא קשורים ל-p אלא מגיעים מגזירות. בגלל שלמשוואה האחרונה 2 שורשים ממשיים, הדיסקרימיננטה שלה חייבת להיות חיובית. כלומר: $B^2 a_k^{\,2} \ge 4ACa_{k+1}a_{k-1}$. נשים את כל הקבועים בצד אחד (כולל המקדמים הבינומיים) ונקבל $Dm_k^{2k} \ge m_{k-1}^{k-1}m_{k+1}^{k+1}$. כאן D לא תלוי ב-p אלא רק בכל מיני קבועים מספריים. אם נבחר למשל
את כל השורשים להיות איזשהו α, נקבל בסוף משוואה ריבועית עם פתרון אחד בלבד, ונקבל: $D\alpha^{2k} = \alpha^{k-1}\alpha^{k+1}$ כלומר $D = 1$, וסיימנו ☺.

סיכום: נכון שקשה להבין מהם השורשים של פולינום לפי המקדמים שלו, אבל אפשר לקבל בקלות כל פולינום סימטרי של השורשים!
על הרעיון הזה אפשר לבנות לא מעט שאלות, ושאלות מהסוג הזה הופיעו לא פעם ולא פעמיים בתחרויות. לכן חשוב להבין ולזכור את זה!