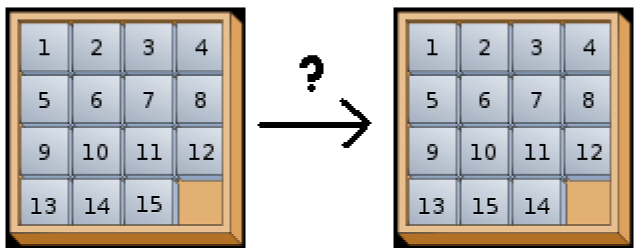
9.4.2011

הרצאה בנושא פרמוטציות
בר גואטה.

פרק ראשון – ייצוג פשוט של פרמוטציה

שאלה (0): פאזל ה 15 הוא לוח 4X4 עם 15 אבנים מרובעות עליו בגודל 1X1. (יש אבן אחת שחסרה)
בכל צעד ניתן להחליק על גבי הלוח את אחת האבנים הסמוכות לאבן החסרה אל האבן החסרה.
היסטוריה : במקור הומצא ע"י Noyes Palmer Chapman בשנת 1874.
<u>השאלה</u> : האם ניתן להגיע מהמצב שבו כל האבנים במקומן פרט ל 14 ו 15 למצב שבו כל האבנים במקומן ?



< פתרון בהמשך ההרצאה >

<u>הגדרה (פרמוטציה):</u>
עבור קבוצה סופית A , פרמוטציה היא פונקציה חח"ע ועל $p: A \to A$.
כלומר – סידור כלשהו של איברי A שבו כל איבר מופיע פעם אחת , ויש חשיבות לסדר.

בהרצאה הזו נתייחס לפרמוטציות על הקבוצה {1,2,3,4,…n} = [n].
<u>ייצוג בסיסי של פרמוטציה :</u>
דוגמה :

השורה העליונה מייצגת את המקור , והשורה התחתונה מייצגת את התמונה של הפרמוטציה עבור כל איבר. הסידור המקורי ידוע (12345) , לכן על מנת לייצג פרמוטציה נכתוב רק את החלק התחתון 43125.

<u>קבוצת כל הפרמוטציות :</u>
בהנתן קבוצה סופית A ניתן להתבונן בכל הפרמוטציות על A , כלומר , כל הפונקציות החח"ע ועל p מ A ל A. נסמן ב S_A את קבוצת הפרמוטציות על A.
עבור שתי פרמוטציות p,q ב S_A נגדיר הרכבה כך :
pq(x) = p(q(x))
(יש ספרים שבהם מרכיבים בכיוון ההפוך. אנחנו נרכיב בכיוון הזה במשך ההרצאה).
<u>תכונות של הרכבת פרמוטציות :</u>
- הרכבה של שתי פרמוטציות היא פרמוטציה.
- מאחר ופרמוטציות הן חח"ע ועל **לכל פרמוטציה יש הופכי**.
- לא תמיד מתקיים pq = qp. (לשאול את התלמידים האם תמיד מתקיים).
- (pq)h = p(qh)
- יש פרמוטציות יחידה (זו פונקציית הזהות).

לכן קבוצת הפרמוטציות על קבוצה A היא חבורה.

מעגלים :
בהנתן פרמוטציה $p: A \to A$ ו איבר $x \in A$ ניתן להתבונן ב
p(x) ,p(p(x)) , p(p(p(x))),..
אחרי מספר סופי של צעדים נחזור לאותו איבר כי A קבוצה סופית. מאחר ו p חח"ע בהכרח נחזור לאיבר x (אחרת זוהי סתירה לחח"ע של p). לכן קיבלנו מעגל. אם נבחר איבר חדש y מחוץ למעגל שקיבלנו ונחזור על אותן הפעולות , נקבל מעגל חדש שזר למעגל הקודם. ניתן להמשיך וכך לחלק את הפרמוטציה p למעגלים. החלוקה היא יחידה כי p היא חח"ע ועל.

דוגמה : עבור הפרמוטציה 43125 נקבל :

1 -> 4 -> 2 -> 3 -> 1
5 -> 5

ולכן החלוקה למעגלים תהיה :

(1423)(5)

ז"א – כל פרמוטציה ניתנת להרכבה על ידי מעגלים זרים באופן יחיד. (עד כדי סדר בתוך המעגלים ובין המעגלים).
לייצוג כזה של פרמוטציה נקרא **ייצוג בעזרת מעגלים**.

חילופים :
הגדרה : חילוף הוא פרמוטציה שמשאירה את כל האיברים במקומם פרט לשניים.
דוגמאות ב S5 :

(53)
12435

למה : כל פרמוטציה שהיא מעגל ניתן לייצג כהרכבת חילופים.
הוכחה:
באמצעות דוגמה :

(abcde)=(de)(ce)(be)(ae)

הדוגמה פועלת באופן כללי על כל פרמוטציה.

למה: כל פרמוטציה ניתן לייצג ע"י הרכבת חילופים :
הוכחה:
כל פרמוטציה ניתנת לייצוג כהרכבת מעגלים , וכל מעגל ניתן לייצוג כהרכבת חילופים. לכן כל פרמוטציה ניתנת לייצוג כהרכבת חילופים.

האם ניתן לייצג כל פרמוטציה ע"י חילופים באופן יחיד ?

שאלה (1) : מבוסס על שאלה מתוך ה shortlist של IMO 1999 , שאלה A3 :
במסיבת בובות לכל אחת מ N = n^2 + 2 ילדות יש בובה עם השם שלה עליה. כל שתי ילדות (בסדר כלשהו) מחליפות ביניהן את הבובות. האם ייתכן שבסוף התהליך כל ילדה תקבל את הבובה שלה בחזרה ?

הגדרה : (זוגיות של פרמוטציה)
תהי p פרמוטציה על קבוצה A. נייצג את p כהרכבת חילופים באופן כלשהו. נספור את כמות החילופים בייצוג של p. נסמנה k. אזי נסמן

$$\mathrm{sgn}(p) = \begin{matrix} 1\,, k \equiv 0 (mod\ 2) \\ -1, k \equiv 1 (mod\ 2) \end{matrix}$$

משפט : sgn מוגדר היטב.
ז"א , כל פרמוטציה היא זוגית או איזוגית.

פתרון שאלה (1):

מתקיים תמיד ש $N = n^2 + 2$ הוא 2 או 3 מודולו 4. סה"כ בנינו פרמוטציה p כהרכבה של N(N-1)/2 חילופים. מהתכונות של N נקבל ש N(N-1)/2 הוא איזוגי , ולכן sgn(p) = -1 . אבל sgn(id) = 1 , מכאן שלא ניתן לקבל את פרמוטציית הזהות , ולא ייתכן שכל ילדה קיבלה חזרה את הבובה שלה.

<u>הוכחה (ש sgn מוגדר היטב):</u>
נספור את כמות האינוורסיות בפרמוטציה : כמות הזוגות (a,b) כך ש a מופיע לפני b אבל a > b.
עבור פרמוטציה p נסמן inv(p) להיות כמות האינוורסיות ב p.

נשים לב שהרכבה של חילוף סמוך משנה את זוגיות inv(p). (משפיע רק על הזוג עצמו , אין השפעה על שאר הזוגות מאחר וההחלפה היא של שני מספרים סמוכים).
כל חילוף ניתן לייצג כהרכבה של מספר אי זוגי של חילופים סמוכים :
(16) = (12)(23)(34)(45)**(56)**(45)(34)(23)(12)
לכן זוגיות כמות האינורסיות בפרמוטציה שווה לזוגיות הפרמוטציה.
אם נניח בשלילה שהצלחנו לייצג את אותה הפרמוטציה ע"י מספר זוגי ומספר אי זוגי של חילופים , אזי ניתן להחליף כל אחד מהחילופים באוסף חילופים סמוכים. נקבל ש inv(p) זוגי ואי זוגי בו זמנית , וזוהי סתירה.

שאלה: ההופכית של פרמוטציה אי זוגית היא זוגית או אי זוגית ?

<u>פתרון שאלה (0):</u>
נגדיר את האינווריאנט הבא :
T = (x + y + (1 + sgn(p)) / 2) % 2
כאשר p היא הפרמוטציה של כל 16 האבנים (כולל המקום הריק , מספר 16) , x ו y הן הקורדינאטות של המקום הריק. (1 + sgn(p))/2 הוא ביטוי המייצג את זוגיות הפרמוטציה.
נשים לב שבכל הזזה של אבן אל המקום הריק x או y משתנים ב 1 , ובו בזמן זוגיות הפרמוטציה משתנה ב 1. לכן הביטוי כולו T לא משתנה.
החלפה של 14 ו 15 לא משנה את x ו y , אבל היא משנה את זוגיות הפרמוטציה , ולכן זהו מצב עם ערך שונה עבור האינווריאנט. מכאן שלא ניתן להגיע אליו מהמצב שבו 14 ו 15 הן בסדר הנכון.

הגדרה : פרמוטציית מעגל היא פרמוטציה ב S_n שבנויה ממעגל אחד בלבד (באורך n).
<u>שאלה (2):</u>
נתונים חילופים $t_2, t_3, \dots t_n$ ב S_n. מתי המכפלה $t_n \dots t_3 t_2$ היא פרמוטציית מעגל ?

<u>פתרון שאלה (2):</u>
המכפלה היא פרמוטציית מעגל אם ורק אם הגרף שקשתותיו $t_n, \dots, t_3, t_2$ וקודקודיו 1,...,n הוא עץ.
כיוון ראשון :
נניח $t_n \dots t_3 t_2$ היא פרמוטציית מעגל. אזי בהכרח יש מסלול בין i לבין $t_n t_{n-1} \dots t_2(i)$. מאחר וזו פרמוטציית מעגל , מדובר במעגל באורך n , ולכן יש מסלול בין כל מספרים i,j. לכן הגרף שלנו קשיר.
בגרף יש רק n-1 קשתות , ומכאן שהוא חייב להיות עץ.

כיוון שני :
נניח T הוא עץ עם קבוצת קודקודים [n] וקשתות $t_2, \dots, t_n$.אם נסיר את הקשת t_n העץ T יתפצל לשני עצים T_1, T_2. באינדוקציה כל אחד מהם מייצג מעגל : C_1, C_2 בהתאמה.המעגלים האלה זרים , לכן נקבל :
$$t_n \dots t_2 = (a_1 a_2) C_1 C_2$$
כאשר $t_n = (a_1 a_2)$ ו $a_1 \in C_1, a_2 \in C_2$.

פרק שני – ספירה של פרמוטציות

<u>משפט :</u> כמות הפרמוטציות על n איברים היא !n.
<u>הוכחה:</u> באינדוקציה. עבור n = 1 יש רק פרמוטציה אחת.
נניח שעבור n = k יש בדיוק !k פרמוטציות.
אזי עבור n = k + 1 לאיבר הראשון יש k + 1 מועמדים , ועבור כל אחד מהם את שאר האיברים ניתן לסדר ב !k דרכים. סה"כ !(k+1)*k! = (k+1).

שאלה: מה יש יותר – פרמוטציות זוגיות או אי זוגיות ?
<u>משפט :</u>כמות הפרמוטציות הזוגיות היא n! / 2.
<u>הוכחה :</u>
עבור כל פרמוטציה p זוגית , יש פרמוטציה p(12) אי זוגית. זוהי העתקה חח"ע ועל בין הפרמוטציות הזוגיות לאי זוגיות , ולכן הכמויות שוות.

<u>שאלה (3):</u> מתוך IMO 1987 שאלה 1 :
נסמן ב $p_n(k)$ את מספר הפרמוטציות של הקבוצה {1,2,3,..,n} שיש להן בדיוק k נקודות שבת.
הוכח שמתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!$$

<u>תחילת פתרון (3) :</u>
נחשב את $p_n(k)$. נסמן ב r_n את כמות הפרמוטציות מגודל n ללא נקודות שבת.
אזי

$$p_n(k) = \binom{n}{k} r_{n-k}$$

ונותר לחשב את הסכום :

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} r_{n-k}$$

אבל איך מחשבים את r_n ?

<u>עקרון ההכלה וההפרדה:</u>
נתונות n קבוצות $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ורוצים לחשב את $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$.
עבור שתי קבוצות :

$$|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

עבור שלוש קבוצות :

$$|\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

ובאופן כללי :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

הוכחה : יהי איבר x ששייך בדיוק ל t קבוצות. הוא נספר בצד שמאל בדיוק פעם אחת.
בצד ימין הוא נספר את הכמות הבאה של פעמים :

$$\binom{t}{1} - \binom{t}{2} + \cdots + \binom{t}{t} (-1)^{t+1}$$

אבל הביטוי הזה שווה 1.

חישוב r_n :

נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה.

נתייחס לקבוצות $A_1, A_2, \dots, A_n$ המוגדרות כך :

$$A_i = \{p \in S_n | p[i] = i\}$$

נחשב :

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = n \cdot (n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \cdots =$$
$$n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \cdots = n!\,(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \dots)$$

ומתקיים :

$$r_n = n! - |A_1 \cup \dots \cup A_n| = n!\,(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots) \approx \frac{n!}{e}$$

סיום פתרון שאלה (3):

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} r_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}(n-k)!\,(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots) = ? = n!$$

מספיק לבדוק האם מתקיים :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}) = ? = 1$$

אפשר לבדוק באינדוקציה על n שזו טענה נכונה.

פתרון נוסף לשאלה (3) :

באמצעות ספירה כפולה : נספור זוגות (p,i) כך ש p פרמוטציה ו i הוא נקודת שבת בפרמוטציה.

יש n אפשרויות ל i , ועבור כל אפשרות יש (n-1)! אפשרויות ל p. סה"כ n! זוגות.

מצד שני יש $p_n(k)$ פרמוטציות עם k נקודות שבת , ולכן $\sum_{k=0}^{n} kp_n(k)$ סופר את כמות הזוגות.

סה"כ $\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!$

אינוורסיות :

נחפש מדד לבדוק עד כמה פרמוטציה היא מסודרת.

עבור פרמוטציה $w = w_1 w_2 \dots w_n$ נאמר ש w_i, w_j הם אינוורסיה אם $w_i > w_j \quad , \quad i < j$.

נסמן ב $inv(w)$ את כמות האינוורסיות בפרמוטציה w.

שאלה: מה המקסימום ש inv(w) יכול לקבל ?

שאלה (4):

כמה פרמוטציות w קיימות כך שמתקיים inv(w) = k ?

נגדיר העתקה בין $f: [1]X[2]X[3]X \dots X[n] \to S_n$:

בהנתן סדרה $a_1, a_2, \dots, a_n$ מתוך $[1]X[2]X[3]X \dots X[n]$, נבנה פרמוטציה באופן הבא :

נתחיל ממילה ריקה. נכניס את n.

נניח שכבר הכנסנו למילה את n,n-1,…n-t + 1. נכניס את n – t באופן הבא :

נכניס אותו למקום ה a_{n-t} במילה.

דוגמה :

$(a_1, a_2 \dots, a_9) = (1,5,2,0,4,2,0,1,0)$

9

98

798

7968

79685

479685

4739685
47396285
417396285
לרצף מהצורה $(a_1, a_2 \dots, a_9)$ נקרא טבלת האינוורסיות של w , מאחר ועבור כל w_i הוא סופר את כמות המספרים הגדולים ממנו שנמצאים משמאלו.
ניתן לחזור מפרמוטציה לטבלת האינוורסיות שלה. לכן ההעתקה f היא חח"ע ועל.
בין היתר זה מוכיח ש $|S_n| = n!$

<u>פתרון שאלה (4):</u>

<u>משפט :</u>

$$\sum_{w \in s_n} q^{inv(w)} = (1+q)(1+q+q^2)\dots(1+q+q^2+\dots+q^{n-1}) = R_n$$

<u>הוכחה:</u>
נעבור על כל הפרמוטציות דרך כל האפשרויות לטבלאות אינוורסיה. נקבל :

$$\sum_{w \in s_n} q^{inv(w)} = \sum_{a_1=0}^{n-1} \sum_{a_2=0}^{n-2} \dots \sum_{a_n=0}^{0} q^{a_1+a_2+\dots+a_n} = \left(\sum_{a_n=0}^{0} q^{a_n}\right)\dots\left(\sum_{a_2=0}^{n-2} q^{a_2}\right)\left(\sum_{a_1=0}^{n-1} q^{a_1}\right)$$

<u>דוגמה :</u>

$$R_3 = (1+q)(1+q+q^2) = (1+2q+2q^2+q^3)$$

לכן שתי פרמוטציות עם אינוורסיה אחת , ושתי פרמוטציות עם שתי אינוורסיות.

<u>שאלה (5):</u> מתוך IMO 1989 , שאלה 6 :
פרמוטציה $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ של הקבוצה {1,2,...,2n} עבור n טבעי חיובי מקיימת את תכונה P אם $|x_i - x_{i+1}| = n$ לפחות עבור i אחד מתוך {1,2,...,2n-1}.
הראה שלכל n יש יותר פרמוטציות עם תכונה P מאשר בלי תכונה P.

<u>פתרון שאלה (5):</u>
נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה. נגדיר תכונה A_k להיות : האיבר ה k ו ה n + k סמוכים בפרמוטציה.
תהי A הקבוצה של כל הפרמוטציות עם התוכנה P. אזי :

$$|A| = \left|\bigcup A_k\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + (something\ positive)$$

ז"א:

$$|A| \geq \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$$

$$|A_i| = 2(2n-1)!$$

$$|A_i \cap A_j| = 4(2n-2)!$$

ולכן:

$$|A| \geq 2n(2n-1)! - \frac{n(n-1)}{2} 4(2n-2)! = (2n-2)!\left(2n(2n-1) - 2n(n-1)\right)$$

$$= (2n-2)!\,(4n^2 - 2n - 2n^2 + 2n) = 2n^2(2n-2)! > \frac{(2n)!}{2}$$