תרגיל על מספרים אי-רציונליים

13.6.2011

1. הוכח כי שבר עשרוני אינו מחזורי, אז הוא מייצג מספר אי-רציונלי.
הוכיחו גם את המשפט ההפוך.

2. הוכח שהמספרים הבאים אינם רציונליים:
א. $a = 0.101001000100001\ldots$
(כמות האפסים בין אחדות עוקבות כל פעם גודל ב-1).
ב. $b = 0.1234567891011\ldots$

3. אם $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots. + a_1x + a_0$ פולינום עם מקדמים שלמים ו- x_0 שורש שלו אז x_0 מספר שלם או מספר אי-רציונלי.
(מסקנה: $\sqrt[3]{12}$ אי-רציונלי).

4. אם $x_0 \in \mathbb{Q}$ אזי קיים $c > 0$ כך שלכל $\frac{m}{n} \neq x_0$ (כש-m, n שלמים) מתקיים אי-שוויון $\left|x_0 - \frac{m}{n}\right| > \frac{c}{n}$.

5. אם $x_0 \in \mathbb{Q}$ אזי לכל $c > 0$ קיימים זוגות (m, n) של שלמים כך ש- $\left|x_0 - \frac{m}{n}\right| < \frac{c}{n}$.

6. הוכיחו שאם m, n טבעיים אז $\left|\sqrt{2} - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{3n^2}$.

7. אם $x_0 \in \mathbb{Q}$ אזי קיימים אינסוף זוגות (m, n) של שלמים כך ש- $\left|x_0 - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}$.

8*. הוכיחו שאם $x \notin \mathbb{Q}$ אזי המספרים $\{nx\}$ עבור $n = 1, 2, \ldots$ יוצרים קבוצה צפופה ב-$[0,1]$.
$\{z\}$ מסמן את החלק השבור של z.

9. הוכיחו שמספר $e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ הוא מספר אי-רציונלי.

10*. הוכיחו שהמספר e^2 הוא אי-רציונאלי.

בהצלחה!

תרגיל על מספרים אי-רציונליים

13.6.2011

חלק ב' – פונקציות טריגונומטריות בנקודות רציונליות בדרך כלל אי-רציונליות

1. הוכיחו שאם $\cos\alpha \in \mathbb{Q}$ אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ גם $\cos(n\alpha) \in \mathbb{Q}$.

2. אם $\cos\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ו- $\sin\alpha = \frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}$ אזי $\sin n\alpha = r_n\sqrt{q^2-p^2}$ כאשר r_n רציונלי.

3. אם $\alpha = \frac{m}{n}\cdot 360^\circ$ ו- $(m,n)=1$ אז נקודות $A_k = (\cos k\alpha, \sin k\alpha)$ עבור $k = 1, 2, \ldots, n$ נמצאות בקודקודים של מצולע משוכלל.

4*. ניתבונן במערכת צירים קרטזית מלבנית שבה יחידהת מדידה בציר ה-x שווה 1 ויחידת מדידה בציר ה-y שווה ל-a. הוכיחו שאם כל הקודקודים של מצולע משוכלל שלמים (כלומר (k,la) כאשר k, l שלמים), אזי כמות הקודקודים במצולע 3 או 4 או 6.

א. תחילה הוכיחו כי לא יתכן ש- $n > 6$.

ב*. הוכיחו שלא יתכן גם $n = 5$.

רמז. סכום של נקודות שלמות זאת נקודה שלמה.

5. נניח כי $0 < \alpha < 90^\circ$ מספר שלם של מעלות, $\tan\alpha$ רצינלי. הוכח כי $\alpha = 45^\circ$.

בהצלחה!