

רעיונות מכניות בגיאומטריה אנליטית: מרכז מסה ומומנט התמד

אם לא נאמר אחרת, העלילה מתרחשת במרחב רב-מימדי, אבל אפשר לחשוב על המקרה הדו-מימדי כי הוא מכיל את רוב התופעות.

הגדרה. נגיד שנתונים לנו נקודות A_1, \dots, A_n ומקדמים ממשיים אבל לאו דווקא חיוביים m_1, \dots, m_n שנקראים מסות.

א. סכום המקדמים $M = m_1 + \dots + m_n$ נקרא המסה הכוללת.

ב. אם המסה הכוללת לא מתאפסת אז $G = \frac{m_1 A_1 + \dots + m_n A_n}{M}$ נקרא מרכז מסה.

1. א. הוכח את חוק הקיבוץ לחישוב מרכז כובד: אם מורידים חלק מהנקודות מהרשימה ומחליפים אותן במרכז הכובד שלהם, שמסתו היא מסה הכוללת של הנקודות שירדו, אז מרכז הכובד של המערכת לא תשתנה.

ב. הוכח את חוק המנוף: מרכז מסות של שתי נקודות A_1, A_2 נמצא על הישר שמחבר אותן ומתקיים: $\frac{GA_1}{GA_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

ג. האם מרכז מסה תלוי בבחירת הקואורדינאטות?

כלומר אם יש שני מערכות צירים שונות במישור, ונחשב את מרכז מסות במערכת הראשונה ובמערכת השנייה, האם נקבל את אותה הנקודה הגיאומטרית?

ד. האם כל נקודה במישור היא מרכז הכובד של A, B, C שהם קודקודים של משולש מסוים? אם לא, איזה נקודות אינן כאלה? אם כן, האם המסות שצריך להציב בקודקודים בשביל לקבל את הנקודה מוגדרות ביחידות?

2. במשולש ABC נקודות P, Q נמצאות על הצלעות BC, AC בהתאמה (בחלקים הפנימיים של הצלעות). AP חותך את BQ בנקודה O .

מהו הערך המקסימלי האפשרי של $\frac{S_{OPQ}}{S_{ABC}}$?

3. נגיד שהנקודות A_1, \dots, A_n נמצאות על ישר.

א. מצא נקודה X שעבורה $\sum_{i=1}^n m_i \cdot XA_i$ מינימלי.

ב. מצא נקודה X שעבורה $\sum_{i=1}^n m_i \cdot XA_i^2$ מינימלי.

ג. הכלל את סעיף ב' למקרה דו-מימדי \ רב מימדי.

הגדרה. המספר $I_X = \sum_{i=1}^n m_i \cdot XA_i^2$ נקרא מומנט התמד של המערכת ביחס ל- X .

הערך המינימלי שלו (שמתקבל בנקודה G שמצאת בסעיף ג' של השאלה האחרונה) נקרא פשוט מומנט התמד של המערכת והוא יסומן ב- I .

4. הוכח את הנוסחאות הבאות לגבי מומנט התמד:

א. $I_x = I + M \cdot GX^2$ (נוסחת שטיינר).

$$I = \frac{\sum_{i < j} m_i \cdot m_j \cdot |A_i A_j|^2}{M} \quad \text{ב.}$$

5. נתונים אורכי צלעות המשולש a, b, c .

א. מצא את אורך התיכון לצלע a .

ב. מצא את האורך p של צ'ביאנה שמחלקת את צלע a לשני חלקים שאורכיהם m, n (כאשר m צמוד ל- b , n צמוד ל- c , וכמובן $m + n = a$). הנוסחא שמתקבלת נקראת נוסחת סטיוארט (Stewart).

6. א. הוכח כי בכל מקבילית סכום ריבועי כל הצלעות שווה לסכום ריבועי האלכסונים.
ב. הוכח שבכל מרובע שאינו מקבילית, סכום ריבועי כל הצלעות גדול ממש מסכום ריבועי האלכסונים.

7. הוכח את משפט לייבניץ: אם ABC משולש, שאורכי צלעותיו a, b, c ונקודת חיתוך התיכונים שלו G , אז לכל נקודה X במישור (או במרחב אפילו)

$$AX^2 + BX^2 + CX^2 = 3 \cdot MX^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

8. א. נתונים אורכי צלעות המשולש ורדיוס של המעגל החוסם שלו. חשב את המרחק בין נקודת מפגש התיכונים לבין מרכז המעגל החוסם.
ב. נתונים אורכי המקצועות של פירמידה משולשת ורדיוס של הכדור החוסם שלה. הגדר את הנקודה שהיא כמו נקודת מפגש התיכונים במשולש ומצא מרחק ממנה למרכז הכדור החוסם.

9. חשב את המרחק בין המרכזים של המעגל החוסם והחוסם של משולש, כאשר נתונים צלעות המשולש ורדיוסים של שני המעגלים.

10.* (משפט פויירבאך) נסמן באמצעות r_a, r, R את הרדיוסים של מעגל החוסם, החסום וחסום מבחוץ במשולש. נסמן את מרכז של מעגל החסום ב- J , של המעגל החסום מבחוץ שרדיוסו נתון ב- J_a ואת המרכז של מעגל 9 נקודות ב- E .

א. הוכח כי $JE = R/2 - r$.

ב. הוכח כי $J_a E = R/2 + r_a$.