

הומותטיה (מתיחה אחידה)

חידת פתיחה: א. האם אפשר לחסום שדה ראייה במישור על ידי שלושה עיגולים זרים?
ב. האם אפשר לחסום שדה ראייה במרחב על ידי שלושה כדורים זרים?
זאת שאלה פשוטה, אתם בטח תפתרו אותה במהלך השיעור.

הרבה שאלות קשות בגיאומטריה הופכות לפשוטות, ברגע שמבצעים העתקה מסוימת. חשוב ללמוד להבין, איזה העתקה תפתור את השאלה. בשביל זה צריך להכיר העתקות שונות ולקבל תחושה (לרחוש אינטואיציה) לגבי העתקות מכל הסוגים. השיעור הזה הוא אחד מסדרת השיעורים – היום נדבר על העתקות מסוג מסוים שנקרא הומותטיה (מתיחה אחידה).

הגדרה. במישור לוקחים נקודה כלשהי O (שנקרא לה מרכז) ובנוסף נתון מספר k , שלילי או חיובי. אם ניקח את O להיות הראשית, אז אפשר להתייחס לכל נקודה P בתור ווקטור OP . אז נגדיר העתקה: להכפיל כל ווקטור ב- k .

לצייר דוגמאות: מקדם 2, מקדם $1/2$, מקדם 1 (שאלה לקהל), מקדם -2.
תכונות: שומר על כיוונים, שומר על דמיון, אבל לא על הגודל (מגדיל את הכל פי k).

דוגמה פשוטה: נחלק את AB, CB, CD, AD באותו יחס (למשל 1:1). הוכח שהתקבל מקבילית.
(שאלה לקהל: הוכיחו את זה תוך שתי דקות.) בעצם אפשר לקבל את זה מדמיון משולשים.
בעצם, כל דבר שאפשר לקבל מהומותטיה אפשר לקבל מדמיון, אבל לפעמים דווקא העתקה נותנת דרך יותר יעילה להסתכל על הדברים.

שאלה לקהל: לחסום ריבוע במשולש. כלומר שכל קודקודי הריבוע יהיו על צלעות המשולש.
[ברור בגלל הרציפות שזה קיים, אבל איך למצוא אותו.]

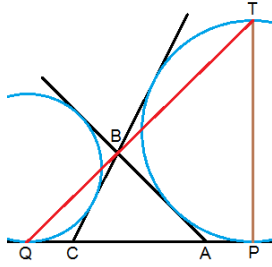
פתרון. למצוא ריבוע שעומד על בסיס של משולש ונוגע במשולש בעוד קודקוד. כעת עושים הומותטיה.

שאלה לקהל. נתונה נקודה בתוך מעגל. כיצד לבנות מיתר, שהנקודה מחלקת אותו ביחס 2:3?
פתרון. עושים הומותטיה עם מקדם $-2/3$.

דוגמה נוספת: תיכונים במשולש נחתכים ביחס 1:2, לכן הומותטיה עם מקדם 2- מעבירה את קודקודי המשולש האמצעי לקודקודי המשולש המקורי, והומו תטיה אם מקדם $1/2$ - עושה את הדבר ההפוך.

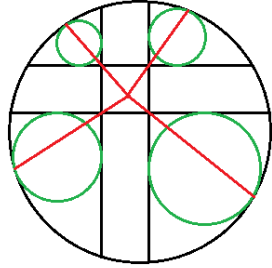
מסקנה: הישר של אוילר: נקודות חיתוך הגבהים H , התיכונים M והאנכים האמצעיים O נמצאים על ישר אחד. גם מרכז מעגל 9 הנקודות E נמצא על אותו הישר. באיזה יחסים הם מחלקים אותו?
בנוסף רואים שמרחקים מ- O לצלעות (שהם R כפול הקוסינוסים של זוויות המשולש) קטנים פי 2 מאשר המרחקים מ- H לקודקודים.

[תזכורת לגבי מעגל אוילר – מעגל 9 נקודות. מהם 9 נקודות. למה הם על מעגל אחד (הוכחה עם מלבנים. אז איפה נמצא מרכז של מעגל 9 נקודות?)
מה הרדיוס שלו בהינתן a, b, c, R, r ?
למה $R \geq 2r$. (פתרון של דן כרמון: מעגל 9 נקודות גדול יותר ממעגל חסום)]



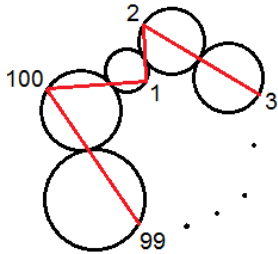
במשולש ABC ניקח שני מעגלים שמשקים מבחוץ לצלעות AB, BC. שמשקים להשכי AC בנקודות Q, P בהתאמה. יהיה קוטר של מעגל הראשון, הוכח ש-Q, B, T נמצאות על ישר אחד.

פתרון: הומותטיה (עם מקדם שלילי) שתעביר מעגל אחד למעגל אחר. הי תעביר את הנקודה העליונה של מעגל הימני לנקודה תחתונה של המעגל השמאלי.



בציור יש ריבוע שנמצא בתוך עיגול (אבל לאו דווקא מרכז, כלומר התמונה לא סימטרית. ממשיכים את צלעות הריבוע עד החיתוכים עם העיגול. בכל אחד מבין

פתרון: כאן כבר צריך להשתמש ביותר מאשר הומותטיה אחת. הישרים (בגלל הומותטיה) עוברים דרך קודקודים של ריבוע החוסם. קווים שמחברים קודקודים מתאימים (או הפוכים) של ריבועים מקבילים נחתכים בנקודה אחת (בגלל הומותטיה).



נתונים 100 מעגלים שמשקים זה לזה באופן חיצוני במחרוזת (גם המעגל ה-100 משיק למעגל הראשון). מתחילים מנקודה על המעגל הראשון ועוברים מנקודה לנקודה על המעגל הבא שהיא נקודת חיתוך שנייה של מיתר שמחבר מספר N ונקודת ההשקה של מעגל N, N+1, ולוקחים נקודת חיתוך השנייה עם המעגל ה-N+1. הוכח שנקודה מספר 101 מתלכדת עם נקודה 1.

משפט: קומבינציה של הומותטיות זו הומותטיה, הזזה, או העתקת זהות. מקדמים של הומותטיה מוכפלים (מקדם של הזזה = 1).

פתרון. כל העתקה כזאת היא צמצום של הומותטיה. לכן העתקת כוללת היא הומותטיה מוכללת, ששומרת על מעגל. מקדם חיובי, לכן זו זהות.

[מסקנות פילוסופיות: יחידות הן מסקנה של הומותטיה.]

[שאלה מגילים 2011.]