12.2.2011

<u>הרצאה בנושא גרפים עבור מחנה הכנה ל IMO , 2011.</u>

בר גואטה.

<u>שאלה (0):</u>

במדינת "רק4" כל עיר מחוברת לבדיוק 4 ערים אחרות בכביש (ישיר). נתון שבאמצעות רכב ניתן להגיע מכל עיר לכל עיר אחרת ע"י נסיעה על הכבישים. התברר שבאחד הכבישים נפער בור ולא ניתן לנסוע בו יותר. האם עדיין ניתן להגיע מכל עיר לכל עיר באמצעות רכב במדינת "רק4" ?

<u>גרף</u>

G = (V,E)

כאשר V קבוצה כלשהי , ו E היא קבוצת קשתות מהצורה :

E = {{u,v} | u,v e V}

ואין חשיבות לסדר בין u ל v ב {u,v}.

אוסף של קודקודים וקשתות ביניהם.

< כמה דוגמאות של ציורים של גרפים על הלוח >

<u>הגדרות:</u>

דרגה של קודקוד - כמות הקשתות המחוברות לקודקוד בגרף. מסומנת בדר"כ d_v עבור קודקוד v.

<u>משפט:</u>

מתקיים לכל גרף פשוט :

$$2|\mathrm{E}| = \sum_{v \in V} \mathrm{d_v}$$

ז"א , תמיד מתקיים שסכום הדרגות זוגי. (מוכיחים באמצעות ספירה כפולה של קשתות).

<u>פתרון השאלה (0) :</u>

נניח בשלילה שיש קשת בגרף שהסרתה תחלק את הגרף לשני גרפים – נתבונן באחד מהם.

(הערה – לקשת כזו קוראים **גשר**).

יש בו קודקוד אחד מדרגה 3 ושאר הקודקודים מדרגה 4. זוהי סתירה , כי סכום הדרגות בגרף חייב להיות זוגי.

<u>משפט:</u>

בכל גרף קשיר (ופשוט) יש שני קודקודים עם אותה הדרגה.

<u>הגדרות :</u>

0. **גרף קשיר** - גרף שבו אפשר "להגיע" מכל קודקוד לכל קודקוד דרך קשתות באמצעות מסלול.

< ציור של גרף קשיר >

<u>הוכחה:</u>

נניח בשלילה שבגרף עם n קודקודים כל הקודקודים עם דרגות שונות. נמיין את הקודקודים לפי הדרגה. הקודקוד הראשון הוא מדרגה לפחות 1 , השני מדרגה לפחות 2 , ... ה n הוא מדרגה לפחות n. וזוהי **סתירה** , כי יש לו רק n-1 שכנים אפשריים.

שאלה (1)

4 סוסים מסודרים על לוח שחמט 3X3 כך:

X		X
O		O

בכל צעד מותר להזיז את אחד הסוסים למשבצת פנויה בלוח (בהתאם לחוקי צעד סוס). האם ניתן לאחר מספר כלשהו של צעדים להגיע למצב :

X		O
O		X

הגדרות:

0. **מסלול בגרף** - סדרה שבנויה "קודקוד קשת קודקוד קשת ...קודקוד" כך שכל שני קודקודים בסדרה מחוברים זה לזה באמצעות הקשת שביניהם בסדרה.
1. **מעגל פשוט בגרף** – מסלול סגור שבו אין קודקודים שחוזרים פעמיים.
2. **Cn** – גרף עם n קודקודים שהוא מעגל. (יש בו n קשתות).

פתרון שאלה (1):

אם נצייר את המסלולים של סוס בלוח 3X3 נקבל מעגל בגודל 9. במעגל הזה שני ה X-ים יהיו שכנים ושני ה O-ים יהיו שכנים , לכן לא ניתן להגיע למצב השני.

מעגלים בגרפים:

מעגל אוילר – מסלול סגור בגרף שבו כל קשת מופיעה בדיוק פעם אחת. (מותר לחזור על קודקודים).

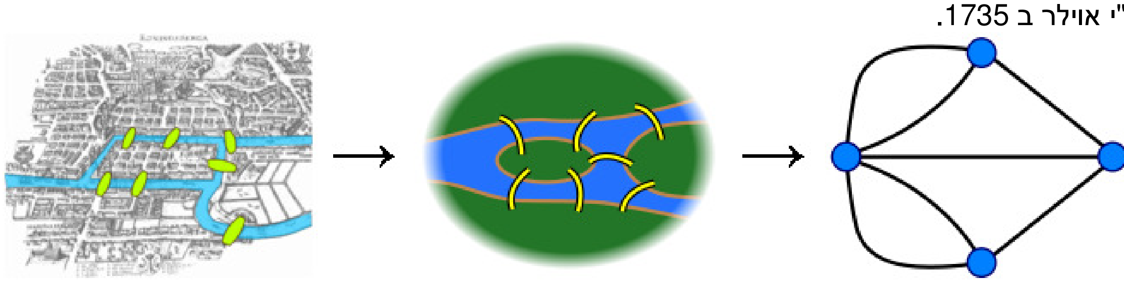
מסלול אוילר – מסלול (לא סגור) בגרף שבו כל קשת מופיעה בדיוק פעם אחת (מותר לחזור על קודקודים).

<דוגמאות למעגלי אוילר בגרפים (ב K3 ובבית עם גג).>

סיפור הגשרים של Konigsberg (בעבר בעיר Prussia , היום Kaliningrad ב Russia):

בעיר הייתה קונפיגורציה של איים ושבעה גשרים שחיברו ביניהם.

הבעיה הייתה למצוא מסלול שעובר דרך כל הגשרים בדיוק פעם אחת. הפתרון לבעיה היה שלילי ונמצא ע"י אוילר ב 1735.



הסבר קצר לאופן הפתרון – כל קודקוד הוא בעל דרגה אי זוגית , וזוהי סתירה כי במסלול רק שני קודקודים יכולים להיות בעלי דרגה אי זוגית. (הראשון והאחרון).

שאלה (2): נתון מצולע משוכלל עם 45 קודקודים. האם אפשר לרשום מספרים מ 0 עד 9 על קודקודיו כך שכל שני מספרים בין 0 עד 9 יהיו שכנים ?

לחילופין – נתון מצולע משוכלל עם 36 קודקודים. האם אפשר לרשום מספרים מ 0 עד 8 על קודקודיו כך שכל שני מספרים בין 0 עד 8 יהיו שכנים ?

הגדרות:

1. Kn – גרף עם n קודקודים שבו כל שני קודקודים מחוברים בקשת.

< ציורים של Kn>

2. רכיב קשירות - אוסף קודקודים מקסימלי שבו מכל קודקוד ניתן להגיע לכל קודקוד באמצעות מסלול.

< ציורים של גרפים ורכיבי קשירות >

תחילת פתרון של שאלה (2):

נניח שבאמת קיים סידור כמו בשאלה.
נבנה גרף עם 10 קודקודים , 0 עד 9. נחבר את כל הקשתות. קיבלנו K10. יש בו בדיוק 45 = 10*9/2 קשתות. נשתמש ברשימת הקודקודים בסידור שקיבלנו כדי לטייל על הגרף. בכל פעם נעבור קשת אחת. מאחר וכל שני מספרים בסידור הם שכנים , נעבור בגרף K10 על כל קשת בדיוק פעם אחת (לא עוברים על אף קשת יותר מפעם אחת כי אז בהכרח הסידור באורך גדול מ 45 וזוהי סתירה).

מכאן שאם אכן יש סידור כמו בשאלה , אזי יש מעגל אוילר ל K10. מספיק לבדוק האם קיים מעגל אוילר ל K10.

תנאים למעגל אוילר בגרף:

משפט : קיים בגרף מעגל אוילר אמ"מ כל הדרגות זוגיות.
הוכחה:

כיוון ראשון :

אם כל הדרגות זוגיות אז קיים מעגל אוילר :
באינדוקציה על כמות הקשתות.
מקרה בסיס : נניח נתון גרף G עם n קודקודים ו n קשתות שבו כל הדרגות זוגיות. בהכרח מדובר במעגל Cn. זהו מעגל אוילר בגרף.

שלב האינדוקציה:

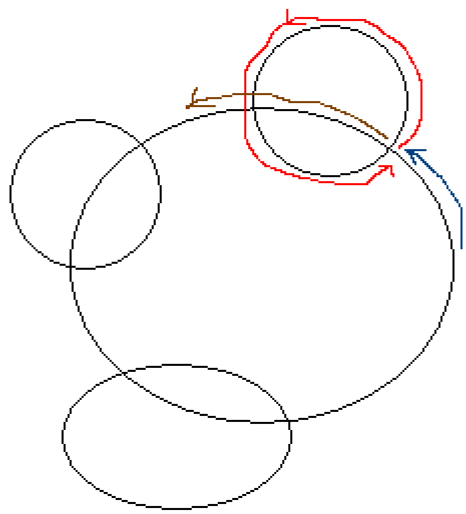
נתון גרף G קשיר עם m קשתות שבו כל הדרגות זוגיות.
נניח שעבור כל גרף G' קשיר שבו כל הדרגות זוגיות ויש בו פחות מ m קשתות קיים מעגל אוילר. צריך להוכיח שבגרף G יש מעגל אוילר.

נבחר קודקוד בגרף G. הדרגה שלו זוגית ו G קשיר. לכן בהכרח הדרגה שלו גדולה שווה 2. נתחיל *"לטייל" על הגרף G* , בכל צעד בוחרים קשת כלשהי וממשיכים בה לקודקוד הבא. אסור לעבור באותה הקשת פעמיים. יש בגרף G מספר סופי של קשתות , לכן באיזשהו צעד נגיע למצב שבו אין עוד קשתות שניתן להשתמש בהן כדי לצאת מהקודקוד. זה בהכרח יהיה הקודקוד שממנו התחלנו את המסלול ,

מאחר והדרגה של כל קודקוד בגרף G היא זוגית , ובכל פעם שעוברים דרך קודקוד במסלול שעשינו מורידים את דרגתו ב2. הקודקוד שממנו התחלנו נשאר בדרגה אי-זוגית , ולכן הוא היחיד שניתן לסיים בו.

קיבלנו מסלול סגור בגרף G (ייתכן שיהיו קודקודים שחוזרים על עצמם במסלול). נסמנו C. אם נסיר את קשתות C מ G נקבל אוסף של רכיבי קשירות. כל אחד מהם מקיים את תנאי הנחת האינדוקציה , ולכן כל אחד מהם מכיל מעגל אוילר. נסמן את מעגלי האוילר האלו ב: C1,C2,…Ck.

מאחר ו G גרף קשיר , ל C יש קודקוד משותף עם כל אחד מהם. על מנת לבנות מעגל אוילר ל G , נתחיל לעבור על המעגל C. בכל פעם שמגיעים לנקודה משותפת עם Ci , עוברים בכל המעגל של Ci ואז חוזרים לעבור על המעגל C. כך נקבל מעגל אוילר ל G.



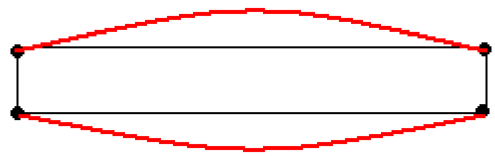
כיוון שני :

אם קיים מעגל אוילר אז כל הדרגות זוגיות – במעגל אוילר בכל פעם שנכנסים ויוצאים מקודקוד מגדילים את הדרגה ב 2. לכן הדרגה בכל הקודקודים זוגית.

<u>משפט:</u> אם בגרף G כל הדרגות זוגיות פרט ל 2 אי-זוגיות אזי יש בו מסלול אוילר שקצותיו הם שני הקודקודים עם הדרגות האי זוגיות :
<u>הוכחה:</u>
מחברים את שני הקודקודים בקשת נוספת , מוצאים מעגל אוילר ולאחר מכן מסירים את הקשת הזו ממעגל האוילר. מקבלים מסלול אוילר.

דוגמאות לשימוש ברעיון של מסלולים על מנת לפתור שאלה :
<u>שאלה (3) (שאלה ממבחן ב "תורת הגרפים" של נוגה אלון)</u>
האם אפשר לחלק ריבוע 3000X3000 למלבנים בגודל 9X1 ו 1X9 ?

<u>פתרון שאלה (3):</u>
נניח בשלילה שהצלחנו לכסות את הריבוע במלבנים של 1X9 ו 9X1.
נגדיר גרף : בכל מלבן של 1X9 נחבר שתי קשתות באופן הבא :



נקבל שפרט לארבעת הקודקודים הפינתיים , כל קודקוד בגרף המייצג את הכיסוי מחובר ללפחות 2 קודקודים אחרים , וכמו כן הדרגות של כל הקודקודים זוגיות.
מכאן שאם נצא מקודקוד פינתי נגיע לקודקוד פינתי אחר. נניח בה"כ ההפרש האורכי בין שתי הפינות הוא 3000. אבל 3000 לא מתחלק ב 9 , **וזוהי סתירה.**

שאלה (4): (מתוך IMO 1991 , שאלה B1):
נתון ש G גרף קשיר עם k קשתות. צריך להוכיח שאפשרי לכתוב מספרים על הקשתות של הגרף : 1,2,...,k באופן שבו בכל קודקוד ששייך ליותר מקשת אחת , המחלק המשותף הגדול ביותר של המספרים על הקשתות השכנות הוא 1.

פתרון שאלה (4):
בוחרים קודקוד A ומתחילים מסלול ממנו. מסמנים את הקשתות לפי הסדר שעוברים במסלול : 1,2,3... ממשיכים עד שמגיעים לקודקוד שבו כל הקשתות כבר מסומנות ומפסיקים.
אפשר לשים לב שהקודקוד הראשון כולל קשת שכתוב עליה 1 , ולכן ה GCD הוא 1 , כל קודקוד במהלך המסלול כולל שתי קשתות עם מספרים עוקבים , ולכן ה GCD הוא 1 , והקודקוד האחרון הוא אחד מבין האפשרויות הבאות :

- אחד הקודקודים שהיו במסלול - ואז ידוע שיש שם שני מספרים עוקבים וה GCD הוא 1.
- קודקוד עם דרגה 1 , ואז לא מחשיבים את הקודקוד הזו בבדיקות הGCD .
- הקודקוד הראשון , ומחוברת אליו קשת "1" , לכן ה GCD הוא 1.

לאחר מכן בוחרים קשת חדשה (שמחוברת מצד אחד לקשת שכבר סומנה. בהכרח אפשר למצוא קשת חדשה כזו כי הגרף קשיר) ומתחילים מסלול חדש. ממשיכים ככה עד שממצים את כל הקשתות.

שאלה(5)
נתון לוח משבצות 12X12 שצבוע ב 10 צבעים. (באופן כלשהו). שני צבעים a,b נקראים "שכנים" אם קיימות שתי משבצות שכנות בלוח שהצבע של אחת מהן a ושל השניה b. (שתי משבצות בלוח הן שכנות אם יש להן צלע משותפת). מהו המספר המינימלי של זוגות צבעים שכנים ?

עצים:

הגדרות:
עץ הוא גרף קשיר ללא מעגלים.
< דוגמאות של עצים. דוגמאות של דברים שאינם עצים >
גשר הוא קשת בגרף שאם מסירים אותה הגרף הופך ללא קשיר.
< דוגמה של גרף עם גשר >

שאלה : כמה קשתות יש בעץ עם n קודקודים ?

עבור גרף G עם n קודקודים התנאים הבאים שקולים:
0. בגרף G יש n-1 קשתות ואין בו מעגלים.

1. הגרף G הוא קשיר וללא מעגלים (הוא עץ).
2. הגרף G הוא קשיר וכל קשת בו היא גשר.

<u>מסקנה:</u> בגרף קשיר המספר המינימלי של קשתות הוא n-1.
<u>הוכחה:</u>
נתבונן בגרף G קשיר על n קודקודים עם המספר המינימלי של קשתות. מכאן שבהכרח הסרה של כל קשת ממנו הופכת את הגרף G ללא קשיר. לכן כל קשת בגרף G היא גשר. לפי 2. , הגרף G הוא עץ ולכן יש בו n-1 קשתות.

<u>פתרון שאלה (5):</u>
אם נתבונן באוסף של 10 הצבעים בתור קודקודים של גרף , אזי זהו גרף קשיר (אפשר להגיע מכל צבע לכל צבע , כי לוח המשבצות קשיר). מכאן שהמספר המינימלי של זוגות צבעים שכנים הוא 10-1 = 9.
ואכן ניתן לבנות דוגמה כזו , אם צובעים את 9 השורות הראשונות של הלוח ב9 הצבעים הראשונים , ואת שאר המשבצות שנותרו בצבע העשירי.

<u>גרפים מישוריים:</u>

- **גרף מישורי** הוא גרף שניתן לצייר במישור בדרך כלשהי בלי שהקשתות יחתכו.
<דוגמאות לגרפים מישוריים>
<דוגמאות לגרפים לא מישוריים>

- **גרף מישורי מחלק** את המישור לחלקים. נקרא להם פיאות (גם החלק החיצוני נקרא פאה).
< דוגמאות לחלוקה של המישור לפאות >

- אם מציירים את הגרף על כדור במקום על מישור הפאה הגדולה (האינסופית) הופכת ל"פאה רגילה".
- הצורות המשוכללות ניתנות ל"ניפוח" על כדור וניתן לשכן אותן במישור.

<u>נוסחת אוילר:</u>
יש נוסחה ידועה שמקשרת בין כמות הקשתות , הקודקודים והפאות עבור גרף מישורי :
$$v - e + f = 2$$
כאשר v כמות הקודקודים , e כמות הקשתות ו f כמות הפאות.
<u>הוכחה:</u>
באינדוקציה על כמות הקשתות.
בסיס : עבור $e = 0$ ו $v = 1$ מקבלים $1 - 0 + 1 = 2$ והנוסחה עובדת.
עבור עץ (e קשתות ו $v = e + 1$ קודקודים) הנוסחה גם מתקיימת.
צעד האינדוקציה : נניח כי עבור כל גרף עם פחות קשתות מ e הטענה מתקיימת.
נוכיח שהיא מתקיימת עבור e קשתות. אם הגרף הוא עץ אזי סיימנו.
אזי נניח שהגרף הוא לא עץ. לכן יש בו מעגל. נבחר קשת מהמעגל ונסיר אותה. בפעולה זו איחדנו שתי פאות , ולכן כמות הקשתות קטנה ב1 , ובו זמנית כמות הפאות קטנה באחד. לכן:
$$v - (e-1) + (f-1) = v - e + f = 2$$
ולפי הנחת האינדוקציה הנוסחה נכונה.

<u>שאלה:</u>
< דוגמה של גרף מישורי עם שני רכיבי קשירות שבו הנוסחה לא נכונה >
איך זה ייתכן ?

משפט :
בגרף מישורי מתקיים : 3v – e >= 6.
מדוע זה נכון ?

הוכחה:

$$3f \le \sum f_i = 2e$$

אזי מתקיים :

ולכן:

כלומר:

גרף דואלי של גרף מישורי הוא גרף שבו מגדירים את הפאות להיות קודקודים.

- גרף דואלי של הגרף הדואלי הוא הגרף המקורי.
- v ו f מתחלפים בנוסחת אוילר (יש להם אותו סימן).

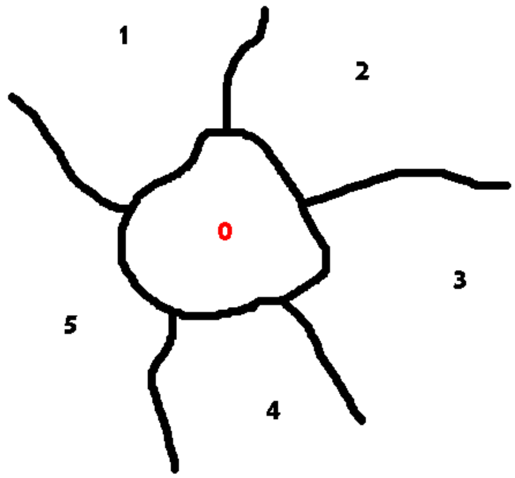
משפט:
כל גרף מישורי אפשר לצבוע ב 5 צבעים – ז"א , כך שכל שתי פאות סמוכות לא יהיו צבועות באותו הצבע.

הוכחה:
מהמשפט הקודם מתקיים :

ז"א ,

אם נתבונן בגרף הדואלי של "מפה מישורית" , נקבל שבהכרח יש פאה שיש לה לכל היותר 5 פאות שכנות.
אם יש לה לא יותר מ4 פאות שכנות , אזי נסיר אותה , נצבע את כל שאר הגרף (באינדוקציה). לאחר מכן נחזיר אותה , ונצבע אותה בצבע ששונה מארבעת הצבעים הסמוכים אליה. (אפשר לעשות זאת כי אנחנו משתמשים בחמישה צבעים).

נניח שיש לפאה הזו 5 פאות שכנות.



נאחד אותה עם שתי מדינות שכנות 1 ו 3. (ראה תמונה). נצבע באינדוקציה את כל המפה ונצייר שוב את הגבולות בין פאה 0 , פאה 1 ופאה 3. מאחר ו 1 ו 3 צבועות באותו צבע , בהכרח יש לפאה 0 רק 4 צבעים סמוכים ולכן ניתן לצבוע אותה בצבע חמישי וכך צובעים את כל המפה.
יוצא הדופן היחידי למקרה זה הוא המקרה שבו פאות 1 ו 3 הן פאות סמוכות , ולכן לא ניתן לצבוע אותן באותו הצבע. אבל מבין 5 הפאות 1,2,3,4,5 בהכרח יש שתיים שאינן סמוכות , מאחר ו K5 הוא אינו מישורי (הוכחנו זאת קודם).

לכן כל גרף מישורי ניתן לצבוע ב 5 צבעים.

<u>הערה:</u> מתברר שכל גרף מישורי ניתן לצבוע ב 4 צבעים (Kenneth Appel and Wolfgang Haken)