ספירה כפולה

1) הגדרה של ספירה כפולה.

2) דוגמא: מס' כדורים בפירמידה: $\sum k\left(n-k\right)=\sum_{k\le n}\binom{k+1}{2}$

3) בארץ אחת יש 9 אזורים. 5 ערים גדולות. 19 ערים קטנות. בנוסף יש קווי אוטובוס EXPRESS (דו כיווניים, כל קו עובר דרך 2 ערים בדיוק). מכל עיר גדולה יוצאים לפחות 14 קווים, מכל עיר גדולה יוצאים לכל היותר 3 קווים.
הוכח שיש אזור ללא קווים פנימיים.
הוכחה: מתבוננים בסכום הדרגות של ערים הגדולות, ובסכום הדרגות הערים הקטנות מסיקים כי יש לכל היותר 3 קווים בין ערים הקטנות.

4) חשב את: $\sum_{k\le 1000}\left[\sqrt[3]{k}\right]$ פתרון באמצעות טבלה 10 X 1000 (שחור\לבן) משבצת $\left(i,j\right)$ שחורה אם $j\le i^3$. מס' לבנים בבירור הינו $\sum_{k\le 10}k^3-k$

5) האם קיים פאון קמור עבורו לכל פאה יש לפחות 6 קודקודים?
לא, בגלל שממוצאה הזוויות בכל פאה לפחות 120 מעלות, ובכל קודקוד פחות מ-120 מעלות.

6) ספרים מסודרים ב- K מדפים. סדרו מחדש ב- K + 1 מדפים.
הוכח שיש ספר עבורה במדף החדש יש פחות ספרים מאשר במדף הקודם.
הוכחה בשלילה: רושמים על כל ספר מספר $1/m$ כאשר m - מספר ספרים מדפה הקודמת. אז סכום כל המספרים הינו K, מצד שני הוא לפחות K + 1.
תרגיל: הוכח שיש 2 ספרים כאלו.

7) שאלה מ- IMO. תחרות, יש בה יש N (אי-זוגי) שופטים, M מתחרים. כל שופט נותן ציון לכל מתחרה 1 או 0. K הינו מספר הסכמים המרבי בין כל שתי שופטים. הוכח $\frac{n-1}{2n}\le\frac{k}{m}$.
הוכחה באמצעות ספירה כפולה של מס' הסכמות בין השופטים.

8) (דולג ברותם) יש 13 מנורות במעגל. מתחת לכל מנורה יש מתג שמשנה מצב של 3 מנורות סמוכות עליו.
בהתחלה יש מצב כלשהו של מנורות. צריך לשנות מצווי מתגים כדי שבסוף יהיה דלוקה מנורה אחת.
מהו מס' מרבי של שנואי המתגים שצריך לעשות?

9) יש N אברים. יש אוסף $\left\{A_i\right\}$ של תת-קבוצות שונות של האיברים שמקיים $A_i\not\subset A_j$.
הוכח כי $1\ge\sum\binom{N}{A_i}^{-1}$.