<u>שיטת הירידה:</u>

<u>שאלה:</u> $x^3+3y^3+9z^3=27xyz$.

<u>פתרון:</u> אם x,y,z פתרון אז הכל מתחלק ב-3 ונקבל פתרון קטן יותר.

<u>שאלת חימום:</u> למה $\sqrt{2}$ אי-רציונלי?

<u>פתרון:</u> אפשר לפרק למכפלה של ראשונים אבל לא בא לי. אז נפתור בעזרת "שיטת הירידה".

נניח כי $\sqrt{2}=\frac{m}{n}\Rightarrow 2n^2=m^2$. אז m מתחלק ב- 2 ולכן n מתחלק ב-2 ונקבל זוג **קטן יותר** m',n' שמקיים $\sqrt{2}=\frac{m'}{n'}$.

לשיטה הזו קוראים **שיטת הירידה**.

<u>הרעיון</u>: אם מפתרון של בעיה בשלמים הצלחתי לבנות פתרון *קטן יותר* אז הבעיה נפתרה...

<u>שברים מצריים:</u> המצרים הקדמונים לא ידעו על כל השברים, רק כאלה שהם מהצורה 1/n. ועדיין הם הצליחו לבנות פירמידות...

איך?

לפי הטענה הבאה:

כל שבר ניתן לרישום כסכום של שברים מצריים שונים:

<u>הוכחה:</u> ראשית עובדה ידועה: $1+1/2+...+1/n+...=\infty$. את זה אפשר להוכיח למשל ככה:

$$\begin{aligned}&1+1/2+....=\\&1+1/2+(1/3+1/4)+(1/5+1/6+1/7+1/8)+...\\&+(1/(2^n+1)+...+1/2^{n+1})\geq\\&1/2+1/2+...+1/2+...=\infty\end{aligned}$$

יהי m/n שבר, נרצה להציג אותו כסכום של שברים מצריים. אז נלך על השיטה החמדנית :
כל פעם נחסר את ה- 1/k הכי גדול שקטן מהשבר שנשאר לנו.

בגלל שהטור למעלה מתבדר, לא נוכל להוריד כל פעם את האיבר הבא שעוד לא הורדנו, מתישהו תהיה קפיצה, כלומר נקבל: $\frac{1}{k}<\frac{m}{n}<\frac{1}{k-1}\Rightarrow mk<n<m(k-1)$.

אחרי שנחסר את 1/k נקבל: $\frac{km-n}{nk}$. אבל עכשיו קורה משהו מעניין. הרי $km-n<km-(k-1)m=m$. כלומר הצלחנו *להקטין את המכנה*. אגב, קיבלנו גם שבר שיותר קטן מ-1/k. לכן אם נמשיך ככה נקטין עוד ועוד את המכנה. המסקנה היא שבסוף המכנה יהיה 0! כלומר הצלחנו לפרק.

דוגמא:
$$\frac{7}{8}-\frac{1}{2}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$
$$\frac{3}{8}-\frac{1}{3}=\frac{1}{24} \Rightarrow$$
$$\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$$
.

שאלה: (מ-IMO...) מצא את כל הזוגות השלמים (a,b) החיוביים כך ש- $\begin{matrix} a \mid b^2+1 \\ b \mid a^2+1 \end{matrix}$.

פתרון: קודם כל כמה דוגמאות: (1,1),(2,5),(5,13)...

אז בואו נרשום במדויק

<u>שאלה:</u> $x^2+y^2+z^2=3xyz$. למצוא את כל הפתרונות.

<u>שאלה:</u> $\frac{a^2+b^2}{ab+1} \in N$. הוכח כי זהו ריבוע.

<u>פתרון:</u>
דוגמא: 1,1 ייתן לנו את 1 שהוא כמובן ריבוע. גם 2 ו-8 הם פתרון, המנה יוצאת 4.

נרשום (כרגיל!) את התנאים במפורש: $a^2+b^2=m(ab+1)$ או $b^2-mab-m+a^2=0$. זו משוואה ריבועית ביחס ל-b. פתרון אחד הוא b כמובן. מוויטא הפתרון השני הוא $ma-b$ או $\frac{a^2-m}{b}$. עכשיו, בהרבה מקרים זה מייצר פתרון קטן יותר. נטען, למשל, כי רוב המקרים הפתרון השני הוא חיובי. כלומר $am-b>0$ או $m>\frac{b}{a}$. אכן, $\frac{a^2+b^2}{ab+1}>\frac{b}{a} \Leftrightarrow a^3+b^2a>ab^2+b \Leftrightarrow a^3>b$

עכשיו, זה נכון כמעט תמיד. למעשה $\frac{a^4+1}{ab+1} \in N$. לכן יש אי שוויון חלש. לכן בכל מצב שבו יש אי שוויון חד נקבל פתרון קטן יותר. אחרי שנקבל שוויון: $a^3=b$ ובבירור $m=a^2$.