תרגיל על חתכים

(תוספת להרצאה של בוריס במחנה פסח)

1. במשולש ABC שבו $AB \neq AC$ מעבירים מהקודקוד A תיכון באורך m, חוצה זווית באורך l, וגובה באורך h. הוכח כי $h < l < m < \frac{AB+AC}{2}$.

2. במרובע ABCD נקודה O היא נקודת חיתוך של AC ו-BD. מעבירים דרך O קטעים PQ שמתחילים על צלע AB ומסתיימים על צלע CD. האורך של PQ תלוי בזווית שבה מעבירים את הישר PQ. הוכח כי אורך של PQ זו פונקציה קמורה של הזווית.

הערה. זה מסיים את ההוכחה שבוריס הראה בהרצאה שלו.

3. הוכח את משפט מנלאוס התלת-מימדי: אם ABCD טטרהדרון, ונקודות P, Q, R, T נמצאות על המקצועות AB, BC, CD, DA אז התנאי ההכרחי והמספיק לכך שהנקודות P, Q, R, T יהיו על מישור אחד הוא $\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BQ}{CQ}\cdot\frac{CR}{DR}\cdot\frac{DT}{AT}=1$.

רעיון להוכחה שנייה לחתך המקסימלי של פירמידה משולשת: להטיל את נקודות A, B, C, D על המישור PQRT באמצעות הטלה אנכית. אז נקבל שמרובע PQRS חסום במרובע A'B'C'D' ובנוסף מתקיים "תנאי מנלאוס".
נניח שנקודות P, Q, R, S מחלקות את הצלעות המתאימות של המרובע ביחסים $\alpha:(1-\alpha)$, $\beta:(1-\beta)$, $\gamma:(1-\gamma)$, $\delta:(1-\delta)$.
נניח בנוסף ששטחי המשולשים A'B'C', A'B'D', B'C'D', A'C'D' הם S_1, S_2, S_3, S_4 בסדר שתבחרו. נניח שהמינימלי ביניהם הוא $S_{\min}$ והמקסימלי $S_{\max}$.

4. א. רשום באמצעות $\alpha,\beta,\gamma,\delta,S_1,S_2,S_3,S_4$ את הביטויים עבור $S_{PB'Q}, S_{QC'R}, S_{RD'T}, S_{TA'P}$.
ב. הוכח כי $S_{PQB'}+S_{QRC'}+S_{RTD'}+S_{TPA'} \geq S_{\min}$.
ג. הסק מכאן שכל חתך מרובעי של פירמידה קטן בשטחו מהפאה המקסימלית שלה.

5.** מה השטח המקסימלי של חתך של קובייה נתונה?

השאלות האחרונות עוזרות לפתור את השאלה הזאת.

6. א. הוכח כי חתך של קובייה זה מצולע קמור עם לא יותר מאשר 6 צלעות.
ב. הוכח שאם חתך עובר דרך המרכז אז מספר הצלעות זוגי.

7. הוכח ששטח של חתך של קובייה שלא עובר דרך המרכז קטן או שווה לשטח החתך שעובר דרך המרכז.

8. הוכח שאם חתך של קובייה הוא מרובע ועובר דרך מרכז הקובייה אז שטחו קטן או שווה ל- $\sqrt{2}$.

ובכן, נשאר לחקור את המקרה של חתך שעובר דרך המרכז והוא משושה.

9. צייר את החתך המשושה של הקובייה.

10*. ליד כל פאה של פאון מציירים וקטור, שמאונך לפאה, מסתכל החוצה מהפאון ואורכו שווה לשטח הפאה (לפעמים קוראים לווקטור כזה ווקטור נורמל). הוכח שסכום הווקטורים שמתאימים לכל הפאות שווה ל-0.

11. נניח כי בקוביית יחידה ABCDKLMN העבירו חתך דרך המרכז שחותך את מקצוע AB ביחס $u:(1-u)$, את מקצוע BC ביחס $v:(1-v)$, את מקצוע CM ביחס $w:(1-w)$.

א. בטא את השטח של החתך באמצעות u, v, w.

ב. הוכח שמתקיים אילוץ: $uvw=(1-u)(1-v)(1-w)$.

12. א. נניח כי ABC משולש שווה צלעות שכל צלעותיו הן באורך 1. על צלעותיו בחלק הפנימי נבחרו נקודות P, Q, R במצב של משפט צ'בה: AP, BQ, CR נפגשים.

מתי מתקבל המקסימום של $\left(S_{\text{AQPB}}\right)^2+\left(S_{\text{ARPC}}\right)^2+\left(S_{\text{BRPC}}\right)^2$?

ב. למה סעיף א' שקול לשאלה על חתכי קובייה?

13. במשולש מסוים נתונים x, y, z – הקטעים של הצלעות בין קודקודי של משולש לנקודות ההשקה עם המעגל החסום. בטא את $\cos\frac{\alpha}{2},\cos\frac{\beta}{2},\cos\frac{\gamma}{2}$ (כאשר α,β,γ הם גדלי זוויות המשולש והם לא נתונים).

14*. נניח כי $\alpha,\beta,\gamma\geq 0$, ובנוסף $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, ובנוסף $0<A<B<C$. הוכח כי

$$A^2\left(\cos\alpha\right)^4+B^2\left(\cos\beta\right)^4+C^2\left(\cos\gamma\right)^4\leq B^2+C^2$$

15. הכלל את כל מה שעשינו לתיבה: בתיבה ששטחי הפאות שלה הם A, B, C שטח כל חתך אינו עולה על $\sqrt{B^2+C^2}$, כאשר A היא הפאה הקטנה.