קמירות ואי-שוויונים

תזכורת: קבוצה קמורה

הגדרה 1. פונקציה נקראת קמורה אם מעל הגרף זאת קבוצה קמורה.

דוגמאות. $x^2, a^x, |x|$. אומרים גם "פונקציה מחייכת".

הגדרה 2. פונקציה f נקראת קמורה עם לכל α,β,x_1,x_2 כאלה ש-$\alpha,\beta\geq 0$, $\alpha+\beta=1$ מתקיים $f\left(\alpha\cdot x_1+\beta\cdot x_2\right)\leq\alpha\cdot f\left(x_1\right)+\beta\cdot f\left(x_2\right)$.

למה שתי ההגדרות אותו דבר? לצייר ציור.

נציב $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, ונקבל $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$.

הערה. במקרה ש-f רציפה, זה גם תנאי מספיק (כי אפשר להגיע לכל מספר באמצע על ידי חלוקה ב-2 הרבה פעמים וגבולות). אבל במקרה ש-f לא רציפה זה לא נכון.

שאלה.** מצא פונקציה (לא רציפה) כזאת ש-$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$, אבל היא לא קמורה.

לא נפתור אותה היום.

אי-שוויון *Jensen* לכל פונקציה קמורה: $f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\leq\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\ldots+f\left(x_n\right)}{n}$.

הוכחה. (תוך כדי ציור) הקמור של $\left(x_i,f\left(x_i\right)\right)$ הוא כולו מעל הגרף, לכן גם מרכז הכובד מעל הגרף.

למשל:

א. $\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2\leq\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}$

ולכן ממוצע חשבוני קטן שווה ממוצע ריבועי: $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\leq\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}$.

ב. $e^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}\leq\frac{e^{x_1}+e^{x_2}+\ldots+e^{x_n}}{n}$. נסמן $a_k=e^{x_k}$. נקבל אי-שוויון הממוצעים:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

באופן דומה, אפשר לקבל אי-שוויון לכל פונקציה קמורה. אבל כיצד למצוא פונקציות קמורות?

טענה. אם $f''(x)\geq 0$, (ואם $f''(x)>0$, אז היא קמורה ממש).

כיצד מוכיחים את זה?

האם אתם מכירים:

משפט רול. נתונה פונקציה גזירה כזאת ש-$f(a)=f(b)$.
אז יש בין a לבין b נקודה c כזאת ש-$f'(c)$.

משפט לגרנז'. נתונה פונקציה גזירה. אז יש בין a לבין b נקודה c כזאת ש-$f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
משמעות גיאומטרית (לצייר ציור): יש משיק שמקביל למיתר.

יש עוד דבר שנקרא כך:

משפט לגרנז'. נתונה פונקציה רציפה. אז יש בין a לבין b נקודה c כזאת ש-

$$(b-a)f(c)=\int_a^b f(x)\,dx .$$

אתם יכולים להבין לבד למה שני משפטי לגרנז' קשורים. האמת שאני צריך רק את הראשון.

משפט לגרנג' מכליל את רול, אבל קודם נוכיח את המשפט הפחות כללי.

הוכחת משפט רול. ניקח מקסימום.

הוכחת משפט לגרנז'. נסמן $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ניקח פונקציה $g(x)=f(x)-kx$.
לפונקציה g שיפוע של משיק 0, לכן אפשר להשתמש במשפט רול.

ובכן, אם $a<b<c$, נקודות $\mathrm{C}(c,f(c))$, $\mathrm{B}(b,f(b))$, $\mathrm{A}(a,f(a))$.
אז מיתר שיפוע של מיתר AB הוא כמו שיפוע של משיק מסוים בין A ל-B, ושיפוע של BC הוא שיפוע של משיק מסוים בין B ל-C,ואם שיפוע עולה מונוטונית, מקבלים שפונקציה קמורה.

ובכן, רואים ש-a^x קמורה, $\ln(x)$ קעורה.

הגדרה. f נקראת קעורה אם $-f$ קמורה, במילים אחרות "מתחת לגרף" היא קבוצה קמורה.
אפשר להגיד גם שיש אי-שוויון כמו לפונקציה קמורה, אבל אם סימן הפוך.

שאלה לקהל: מתי x^a קבוצה קמורה? לאיזה a?

מסקנה: הרבה אי-שוויונים. למשל – מה יותר גדול: ממוצע חשבוני או הרמוני?

שאלה לקהל: עבור $0 \le x \le 1$ הוכח כי $\sqrt{1+3x}+\sqrt[3]{27-19x} \ge 4$.

פתרון. זאת פונקציה קעורה. לכן מינימום שלה בקצוות.
[שורש (חזקה בין 0 ל-1) פונקציה קעורה.
שינוי קואורדינאטות ליניארי – מעביר פונקציה קעורה לקעורה.
סכום פונקציות קעורות – פונקציה קעורה.]

יש גם פונקציות קעורות \ קמורות בתחומים.
למשל sin הוא פונקציה קעורה בתחום $\left[0,\pi\right]$. מסקנה: למצולע חסום בעל N צלעות יהיה היקף מקסימלי, אם המצולע משוכלל.

שאלה לקהל: מה עם מצולע חוסם? באיזה תנאי יש לו היקף מינימלי?

רמז: טנגנס. האם הוא קמור או קעור?

אי-שוויון *Jensen* מוכלל. לכל פונקציה קמורה:
$$f\left(\tfrac{w_1x_1+w_2x_2+...+w_nx_n}{w_1+w_2+...+w_n}\right) \le \frac{w_1f\left(x_1\right)+w_2f\left(x_2\right)+...+w_nf\left(x_n\right)}{w_1+w_2+...+w_n}.$$
כאשר המשקלים – מספרים חיוביים. הוכחה היא כמו לאי-שוויון Jensen רגיל, אבל עכשיו פשוט לוקחים את משקלים שונים.

שאלה לקהל: להוכיח $x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{x_n} \ge \left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^{x_1+x_2+...+x_n}$.

אי-שוויון אלמנטארי: $\frac{a^2}{b} \ge 2a-b$. האם אתם יכולים להוכיח אותו?

מה עם $\frac{a^3}{b^2} \ge 3a-2b$?
האם מישהו יכול להכליל?

בונוס:
$$x_1+x_2+x_3+...+x_{n-1}+x_n = \frac{a_n^n}{a_{n-1}^{n-1}}+\frac{a_{n-1}^{n-1}}{a_{n-2}^{n-2}}+...+\frac{a_3^3}{a_2^2}+\frac{a_2^2}{a_1}+a_1 \le$$
$$\le na_n-\left(n-1\right)a_{n-1}+\left(n-1\right)a_{n-1}-\left(n-2\right)a_{n-2}+...+3a_3-2a_2+2a_2-a_1+a_1 =$$
$$= na_n = n\cdot\sqrt[n]{x_1x_2x_3\cdot\ldots\cdot x_{n-1}x_n}$$

נרשום את האי-שוויון בכיוון ההפוך: $\beta=1-n \quad , \quad \alpha=n$. אז $\alpha+\beta=1$ ומקבלים:
$$e^{\alpha x+\beta y} \ge \alpha e^x+\beta e^y$$
זה לא היה צריך להיות הפוך? קיבלנו סתירה במתמטיקה. ☺

פתרון הסתירה: נכון שפונקציה קמורה נמצאת מעל המיתר, אבל היא מעל להמשך המיתר.
ובאופן דומה אפשר להוכיח הרבה אי-שוויונים (כאשר מציבים פונקציות קמורות שונות)

מקרה פרטי: משיק.
למשל:

א. אי-שוויון ברנולי: $(1+x)^n \geq 1+nx$

ב. עבור $x>0$ מתקיים $\sin x < x$.

ג. $e^x \geq x+1$

ד. $e^x \geq ex$

דוגמא. מה יותר גדול: e^π או π^e.

כמובן שאפשר לחקור פונקציה $\sqrt[e]{e}$ או $\sqrt[\pi]{\pi}$, ולחקור פונקציה $\sqrt[x]{x}$ (המקסימום שלה ב-e) אבל אנחנו נעשה משהו יותר יפה.
השאלה היא e או $\pi^{e/\pi}$.
אבל $\pi^{e/\pi} \geq \pi \cdot e/\pi = e$.
מש"ל.

חידה לערב שתעזור להירדם: צלעות המשולש a, b, c, והצלע הקטנה היא a, כלומר $a \leq b, c$.
נתונה גם נקודה בתוך המשולש, ומרחקים ממנה לקודקודים הם p, q, r. צ"ל כי $p+q+r<b+c$.