

תרגיל בקומבינטוריקה

0. מלך העמיד 127 אסירים בשורה, כך שכל אסיר רואה רק את האסירים שלפניו ולא את אלה שמאחריו. על ראשו של כל אסיר יש כובע שחור או לבן. כל דקה אחד האסירים חייב לנחש את הצבע של הכובע שלו ולהגיד אותו כך שכל האסירים ישמעו. אם ניחש האסיר לא נכון, מוציאים אותו להורג, ואם ניחש נכון – לא מוציאים אותו להורג.

א. מהי האסטרטגיה שלפיה כמה שפחות אסירים ימותו?

ב. ומה אם כל אחד רואה את כולם חוץ מעצמו, האם זה עוזר?

הערה. האגדה מספרת שבמצבים של סכנת חיים בן אדם מסוגל לחשב ממש מהר.

1. בעיר הבירה יש m צמתים, וחלק מהצמתים מחוברים על ידי רחובות (כך שכל רחוב מחבר רק שני צמתים). ידוע שסה"כ כמות הרחובות בעיר היא n , כך ש $n > m$.

המלך חסם חלק מהרחובות לתנועה. ראש העיר מנסה לפתוח את כל הרחובות לתנועה בחזרה, ובשביל זה מדי שבוע מותר לו לבצע את הפעולה הבאה:

כל שבוע הוא בוחר צומת ופותח את כל הרחובות החסומים שייצאו ממנו, אך גם חוסם את כל הרחובות שהיו פתוחים.

א. האם בהכרח יכול היה המלך לחסום חלק מהרחובות כך שראש העיר לעולם לא יצליח במשימתו?

ב. ומה אם $n=m$?

10. בארמון יש מספר חיילים שעושים שמירות ושלושה קצינים האחראים על שיבוץ של החיילים לשמירות. כל קצין מגיע לארמון רק פעם בשלושה ימים, ומשבץ את החיילים לשמירות של אותו היום (כך שכל יום יש רק קצין אחד).

המלך פקד עליהם 4 פקודות:

• כל יום חייב להיות לפחות חייל אחד ששומר.

• אף חייל לא שומר יותר משתי שמירות סה"כ.

• רשימת השומרים לא יכולה להיות זהה לרשימה שכבר הייתה בעבר.

• הקצין הראשון שלא מבצע את אחת הפקודות שלעיל – הולך לכלא (על סירוב פקודה).

האם לאחד הקצינים יש אסטרטגיה שבאמצעותה תציל אותו מכלא? (הקצינים לא עוזרים אחד לשני, וכל קצין רואה את כל השיבוצים שקרו בעבר, גם כאלה של הקצינים האחרים.)

11.* המלך החליט שהוא היה נחמד מדי כלפי האסירים, ושינה את החוקים. עכשיו כל אחד מ-127 האסירים רואה את כולם חוץ מעצמו, והכובעים עדיין בשני צבעים, אך עכשיו כולם אומרים את הניחוש שלהם בו-זמנית. הפעם מותר לאסירים גם לשתוק (כדי שלא יהיה יותר מדי רעש), אך אם כולם שותקים או אם אחד האסירים מנחש לא נכון – מוציאים להורג את כולם.

מה האסטרטגיה שבעזרתה יש לאסירים סיכוי הכי גבוה לשרוד? (סיכוי – כמות המצבים שבהם הם ישרדו חלקי כמות כל המצבים של הכובעים)

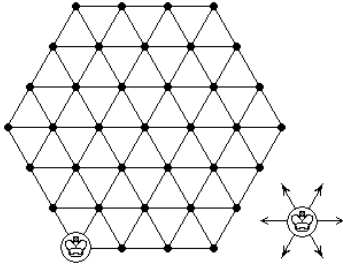
100. עדיין משעמם למלך והוא הביא קוסם. לקוסם יש חפיסה של 64 קלפים קסומים (רגילים לגמרי). הקוסם מבצע איתם את הקסם הבא: הקוסם יוצא מהחדר, ובן אדם מהקהל (המלך) בוחר את אחד מ-64 הקלפים (כך שכולם חוץ מהקוסם יודעים איזה). אחר כך הוא לוקח את החפיסה, מערבב בין הקלפים ומחלק אותם לשתי קבוצות של קלפים. אחר כך השוליה של הקוסם מעביר את אחד הקלפים מקבוצה אחת לשנייה. אחרי זה הקוסם חוזר, רואה את שתי הקבוצות של הקלפים, ומנחש את הקלף שהמלך בחר.

המלך הבטיח לערוף את ראשו של הקוסם אם הוא לא ינחש נכון. האם לקוסם ולשולייטו יש אסטרטגיה לשעשע את המלך ולשמור על ראשם בוודאות?

משחקים

1. 32 כוסות עומדות במעגל. בכוס ראשונה יש 1 גרם של נזל, בכוס שנייה – 2, בשלישית – 3, וכך הלאה עד 32. כל דקה איגור מוזג 1 גרם של נזל לכוס ועוד אחד לכוס הסמוכה לה, ובוריס בוחר 2 כוסות סמוכות ומחליף בינם.

איגור רוצה לגרום לזה שבכל הכוסות תהיה כמות זהה של נזל. האם בוריס יכול להפריע לו?



2. מלך משושה הוא כלי של שח משושה, שיודע לזוז צעד אחד בתור, בכיוון כלשהו (מתוך השישה). שני שחקנים משחקים על לוח משושה (לוח בצורת משושה שווה צלעות שמורכב ממשולשים שווים צלעות. משחקים על הקדקדים של המשולשים). בהתחלה המלך עומד באחת הפינות של הלוח. בכל תור אחד השחקנים מזיז את המלך צעד אחד. אסור למלך לעבור באותה נקודה פעמיים. שחקן שלא מצליח לעשות מהלך – מפסיד. לאיזה מהשחקנים יש אסטרטגיה מנצחת?

3. איה ובני יוצאים לטיול בארכיפלג 2009 האיים (אזור בתוך הים שמורכב מ-2009 איים). איים מסויימים מחוברים במסלולי סירות דו-כיווניים. איה ובני משחקים משחק בזמן הטיול: איה בוחרת את האי הראשון בו יעגנו. כל אחד בתורו בוחר מהו האי הבא אליו הם מפליגים, מבין האיים בהם עוד לא ביקרו. בני בוחר ראשון. השחקן שאין לו מהלך חוקי, מפסיד. הוכח כי איה תמיד יכולה לנצח.

4. לשני פיראטים יש שני שקי מטבעות ויהלום אחד. הם מחלקים את המטמון בצורה הבאה: כל פיראט בתורו לוקח כמות זוגית של מטבעות מאחד השקים, שם חצי מזה בשק השני ואת השאר משאיר לעצמו. כשפיראט לא יכול לעשות מהלך כזה הוא מפסיד והפיראט השני לוקח לעצמו את היהלום (שהרבה יותר יקר משני שקי המטבעות). לאילו כמויות התחלתיות של מטבעות הפיראט הראשון יכול לזכות ביהלום בוודאות?

5. בלוח משבצות בגודל 69×49 מסומנים כל 70×50 הצמתים (קדקדים של המשבצות). שני שחקנים משחקים במשחק הבא: כל שחקן בתורו בוחר שתי צמתים שעוד לא נבחרו, ומחבר אותם בקטע ישר (כך שבסוף מכל צומת יוצא רק קטע אחד כזה). בסוף, כשנגמרים המהלכים, השחקן הראשון בוחר כיוון לכל אחד מהקטעים, וסוכם אותם כווקטורים. הוא מנצח אם הסכום ייצא 0. האם לשחקן הראשון יש אסטרטגיית ניצחון?

משחקים ב'

1. שניים משחקים באיקס-עיגול על לוח משבצות אינסופי. מנצח מי שמצליח לעשות שורה או עמודה של חמישה סימנים שלו ברצף (לא באלכסון). למי יש אסטרטגיה מנצחת?
2. שני שחקנים משחקים במשחק הבא: על השולחן מונחים 9 כדורים עם כל המספרים מ-1 עד 9 רשומים עליהם. בכל תור שחקן לוקח לעצמו את אחד הכדורים לבחירתו מהשולחן. מי שמצליח לצבור 3 כדורים שסכומם 15 – מנצח. המשחק נגמר כשאחד השחקנים ניצח, או כשנגמרו הכדורים על השולחן. מי מהשחקנים מנצח באסטרטגיה אופטימלית?
3. על השולחן מונחים n מטבעות. שני שחקנים משחקים במשחק הבא: בתור הראשון השחקן הראשון לוקח לעצמו מספר מטבעות, אך לא את כולם. לאחר מכן, בכל תור השחקן לוקח לא יותר מטבעות מאשר לקח יריבו בתור הקודם (כלומר כמות המטבעות שלוקחים בכל תור לא גדלה). מי שלוקח את המטבע האחרון – מנצח. לאילו ערכי n לשחקן הראשון יש אסטרטגיית ניצחון?
4. על מעגל מסודרים 2^k מספרים שלמים. בכל תור בכל מקום כותבים את הערך המוחלט של ההפרש של המספר והבא אחריו. הוכח שמתישהו במעגל יהיו כתובים רק אפסים.
5. כניסה למערה חסומה ע"י שולחן עגול שמסתובב. על השולחן נמצאות במעגל ובמרחקים שווים 2^n חביות סגורות, זהות לחלוטין למראה. בכל חבית נמצא דג מלוח, שראשו מכוון כלפי מטה או כלפי מעלה. בכל מהלך, עלי באבא בוחר מספר חביות והופך אותן בו-זמנית. לאחר מכן, השולחן מסתובב. כאשר השולחן מפסיק להסתובב, כבר אי-אפשר לזהות אילו חביות נהפכו בפעם הקודמת. המערה נפתחת רק כאשר כל הדגים מסתכלים באותו כיוון. הוכח כי עלי באבא יכול לפתוח את המערה במספר סופי של מהלכים.