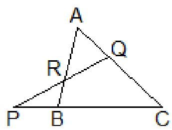
שאלות נפוצות בגיאומטריה:

א. האם 3 נקודות נמצאות על ישר אחד?

ב. האם 3 ישרים נפגשים בנקודה אחת?

שאלות אחרות ניתן לתרגם לשאלות מהסוג הזה (למשל האם 4 ישרים נפגשים בנקודה אחת).
היום נלמד משפטים שנותנים תשובות לשאלות הללו כאשר יש משולש ברקע.



משפט מנלאוס: נתון משולש ABC, נקודות P, Q, R נמצאות על הצלעות שלו BC, AC, AB בהתאמה (או המשכיהם).

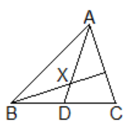
אז P, Q, R נמצאות על ישר אחד אך ורק כאשר $\frac{AR}{BR}\cdot\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CQ}{AQ}=1$.

הוכחה. כיוון ראשון: נניח שכולן על ישר אחד. נטיל את הכל לישר שמאונך ל-PQR. אז הנקודות P, Q, R יגיעו לנקודה O, ונקודות A, B, C יגיעו לנקודות A', B', C' בהתאמה. קל לראות כי

$$\frac{AR}{BR}=\frac{A'O}{B'O},\frac{BP}{CP}=\frac{B'O}{C'O},\frac{CQ}{AQ}=\frac{C'O}{A'O},$$

ולכן $1=\frac{AR}{BR}\cdot\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CQ}{AQ}=\frac{A'O}{B'O}\cdot\frac{B'O}{C'O}\cdot\frac{C'O}{A'O}$.

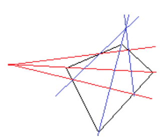
כיוון שני - תרגיל לקורא. רמז קל לראות שכאשר מזיזים את הנקודה על הצלע אז היחס משתנה, ולכן אם מתקיים השוויון במצב הטוב אז הוא יפסיק להיתקיים.



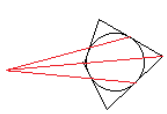
דוגמא פשוטה: הישר דרך B מחלק את התיכון AD ביחס 1:3,
כלומר $DX : AX = 1 : 3$. באיזה יחס BX מחלק את השטח של ABC?

פתרון. משפט מנלאוס ב-CAD.
תהיה P על חיתוך של BX ו-AC. אז לפי מנלאוס במשולש CAD
מקבלים $1=\frac{DB}{CB}\cdot\frac{AX}{DX}\cdot\frac{CP}{AP}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{CP}{AP}$ ומכאן היחס.

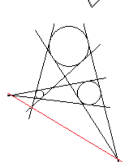
שאלה לקהל: מה קורה עם R במשפט מנלאוס בורחת לאינסוף?
מסקנה: משפט מנלאוס מכליל את משפט תלס.



[דוגמה: ABCD מרובע. P, Q, R, S על AB, BC, CD, DA בהתאמה. אז PQ, AC, RS מקבילות או נפגשות בנקודה אחת אם ורק אם QR, BD, PS מקבילות או נפגשות בנקודה אחת.
[זה משפט דזארג]



בעצם אם P,Q,R,S נקודות השקה עם מעגל שחסום ב-ABCD זה נכון.]



שאלה לקהל: שלושה מעגלים במישור בגדלים שונים. לוקחים חיתוך שני המשיקים החיצוניים בכל זוג מעגלים. הוכח שהם על ישר אחד.

משפט צ'בה (Ceva). נתון משולש ABC, נקודות P, Q, R נמצאות על הצלעות שלו BC, AC, AB בהתאמה (או המשכיהם).

אז AP, BQ, CR נפגשות בנקודה אחת (או מקבילות) אך ורק כאשר $\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$.

הערה. הישרים AP, BQ, CR נקראות צ'ביאנות.

דוגמאות פשוטות. א. תיכונים נפגשים בנקודה אחת.

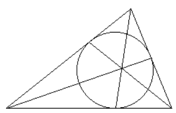
ב. חוצי זוויות נפגשים בנקודה אחת בגלל תכונת חוצה זווית,

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}=1$$

(שאלה לקהל: האם אתם מכירים את תכונת חוצה זווית?)

ג. גבהים: מהגדרת קוסינוס

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=\frac{b\cdot\cos\alpha}{a\cdot\cos\beta}\cdot\ldots=1$$



דוגמה שלא הכרתם קודם: נקודת ז'רגון: צ'ביאנות דרך נקודות ההשקה של המעגל החסום נפגשות.

הוכחה ראשונה למשפט צ'בה.

נשים בנקודות A, B משקלים כך שמרכז מסה יהיה ב-R. נשים בנקודה C משקל כך שמרכז מסה של A ו-C יהיה ב-Q. האם מרכז מסה של B ו-C ב-P? כן, אם ורק אם התנאי של צ'בה מתקיים. אז מרכז הכובד של 3 המסות נמצא על AP, BQ, CR בו-זמנית.

[אם הקהל דורש הסבר לגבי מסות: יש $\frac{\alpha A+\beta B+\gamma C}{\alpha+\beta+\gamma}$, מותר שמסות תהיינה שליליות, רק שסכום המסות לא יהיה 0. מרכז מסה מקיים שני חוקים גיאומטריים:

1. מרכז מסה של שתי נקודות מקיים את חוק המנוף: הוא נמצא על הישר AB ומחלק אותו ביחס $\frac{AR}{RB}=\frac{\beta}{\alpha}$, כלומר מרכז מסה יותר קרוב לנקודה היותר כבדה.
2. אפשר לחשב מרכז מסה בחלקים: קודם לחשב מרכז מסה של חלק מהנקודות, ולשים במרכז הביניים הזה משקל כולל שלהם, ואז לחשב מרכז מסות של נקודות שנשארו.

שני החוקים מהווים תרגיל קל בחשבון וקטורי, במקרה ה-N-מימדי. נו באמת זה קל, אתם לא רוצים שאני אעשה את זה על הלוח כי זה ברור. עכשיו אתם מבינים שהוכחה שנתתי לצ'בה היא קצרה ופשוטה.]

מהוכחה הזאת אנחנו מקבלים לא רק צ'בה אלה יותר: אם בתמונה של צ'בה AP, BQ, CR נחתכים ב-O, אז O מחלקת את AP, BQ, CR ביחסים $\frac{\alpha}{\beta+\gamma},\frac{\beta}{\alpha+\gamma},\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$.

למשל: תיכון מחולק ביחס 1:2, חוצה זווית ביחס $\frac{a}{b+c}$, וכך אפשר לחשב גם כל יחס אחר מסוג זה.

הוכחה שנייה למשפט צ'בה. (שטחים) במצב שהצ'ביאנות נפגשות ב-O:

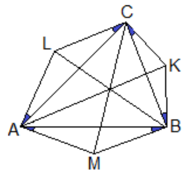
נסמן $S_{OAB}=S_1$, $S_{OBC}=S_2$, $S_{OCA}=S_3$.

אז $BP / PC = S_{ABP} / S_{APC} = S_{OBP} / S_{OPC} = S_2 / S_3$.

עוד שני יחסים דומים מוכפלים ביחד עם היחס הזה, ומקבלים: $\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=\frac{S_2}{S_1}\cdot\frac{S_3}{S_2}\cdot\frac{S_1}{S_3}=1$.

[משפט הפוך נגרר מהמשפט הישר, כי על הישר AB יש רק R אחד שמקיים את היחס.

עדיף לדלג על הערה זאת לטובת השלב הבא.]



עוד דוגמה למשפט צ'בה: על צלעות של ABC בונים כלפי חוץ משולשים שווי שוקיים דומים (כך שצלעות ABC הם הבסיסים): AMB ,CLA ,BKC.
הוכח שהישרים CM ,BL ,AK נפגשים.

K, L, M לא על הצעות - מה לעשות? צריך לחשב איכשהו את $\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}$.

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{\mathrm{S_{ACK}}}{\mathrm{S_{AKB}}}=\frac{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CK}\cdot\sin(C+\phi)/2}{\mathrm{BK}\cdot\mathrm{AB}\cdot\sin(B+\phi)/2}=\frac{\mathrm{AC}\cdot\sin(C+\phi)}{\mathrm{AB}\cdot\sin(B+\phi)}$$

עכשיו מכניסים שלושה ביטויים כאלה למשפט צ'בה.

לתשומת לב הקהל: אין שום הבדל בין נוסחא של משפט צ'בה למשפט מנלאוס!
ברור אבל שהמצבים הגיאומטריים שהם מתארים שונים לגמרי!
כך מצאנו סתירה במתמטיקה.
הוכחתי לכם את שני המשפטים, ואתם קיבלתם את ההוכחות.

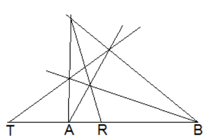
הפסקה.

נו, מה עם הסתירה במתמטיקה?
מישהו פתר?
אנחנו לא יכולים להמשיך לדבר על מתמטיקה עם יש בה סתירה. מה עושים?

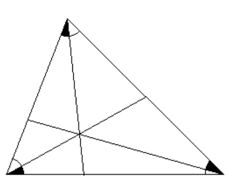
במשפט צ'בה מספר אי-זוגי של נקודות על החלקים הפנימיים של הצלעות, ובמשפט מנלאוס מספר זוגי, הרי ישר חותך משולש מספר זוגי של פעמים.
במקום להגיד את המילים האלה, ניוטון הציע לדבר במושגים של קטעים מכוונים. בכל ישר בוחרים כיוון באופן שרירותי, ואז AB יהיה אורך אם השמות של נקודות בכיוון הנכון, ומינוס האורך אם הנקודות בכיוון ההפוך. היתרון של אורך מכוון על אורך רגיל הוא שלכל 3 נקודות על ישר אחד מתקיים

$$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}=\mathrm{AC}$$

בזמן שאם עובדים עם האורך הרגיל יש 3 מקרים של בחירת סימנים. גם משפטי צ'בה ומנלאוס יותר כל לרשום באמצעות קטעים מכוונים. בקטעים מכוונים נקודה R על ישר AB שמקיימת $\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{BR}}=k$ מוגדרת באופן יחיד, ובקטעים הרגילים – בשני דרכים.



[משהוא אבל כן יוצא מהעובדה שמשפט שנוסחאות מנלאוס וצ'בה דומות. אם במשולש ABC הנקודות P, Q, R מקיימות את התנאי של צ'בה, ו-P, Q, T את מנלאוס, אז אפשר לצמצם אותם ולקבל שמיקום של R נקבע ביחידות על ידי T, A, B למרות שלכל הנקודות האחרות בציור יש הרבה חופש. רביעות כמו: T, R, A, B נקראות רביעיות הרמוניות.]



למשפט צ'בה יש גרסה נוספת: משפט צ'בה הזוויתי.
משפט צ'בה הזוויתי. תנאי נוסף ששקול לתנאי צ'בה ולמפגש צ'ביאנות

בנקודה אחת: $\frac{\sin(ACR)}{\sin(RCB)}\cdot\frac{\sin(CBQ)}{\sin(QBA)}\cdot\frac{\sin(BAP)}{\sin(PAC)}=1$.

(כמובן, הזוויות מכוונות).

משפט צ'בה זוויתי מכליל את משפט על מפגש חוצי זוויות, באותה צורה כמו שמשפט צ'בה רגיל מכליל את משפט המפגש של תיכונים. משפט צ'בה זוויתי משחרר אותנו מהאילוץ שנקודות נמצאות על הצלעות.

קל להוכיח באמצעות משפט סינוסים שנוסחת צ'בה זוויותית שקולה לנוסחת צ'בה רגילה, ושקולה גם לעובדת מפגש הצ'ביאנות (רוצים לנסות? עם קצת הדרכה מסוגלים לעשות לבד.)

באופן דומה אפשר ליצור משפט מנלאוס זוויתי.

דרך נוספת להסתכל על משפט צ'בה זוויתי:

משפט. משושה ABCDEF חסום במעגל. אז AD, BE, CF נפגשות בנקודה אחת אם ורק אם $AB\cdot CD\cdot EF=BC\cdot DE\cdot FA$.

שקילות של זה למשפט צ'בה זוויתי במשולש ACE מתקבלת ממשפט סינוסים – מיתר יחסי לסינוס הזווית.

אפשר להוכיח את זה ישירות ולקבל הוכחה נוספת של משפט צ'בה. אכן, אם W נקודת חיתוך האלכסונים, אז מדמיון משולשים $\frac{DE}{AB}=\frac{EW}{AW}$; $\frac{BC}{EF}=\frac{CW}{EW}$; $\frac{FA}{CD}=\frac{AW}{CW}$.

משפט קרנו: נתונים משולש ABC, ונקודות P, Q, R במישור. האנך מ-P על BC, מ-Q על AC, מ-R על AB נפגשים בנקודה אחת אם ורק אם $AR^2-BR^2+BP^2-CP^2+CQ^2-AQ^2=0$.

משפט קרנו מכליל את המשפטים לגבי חיתוך הגבהים ואנכים אמצעים.

הסבר: צריך להתחיל מטענה על מרובע: אלכסוני המרובע מאונכים אם $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$.

מסקנה: האנכים מקודקודי המשולש PQR לצלעות מתאימות של משולש ABC נפגשים אך ורק אם גם ההפך נכון.

דוגמאות נוספות יוגשו בתרגיל.

[[אם נשאר זמן אפשר לרשום על הלוח את משפטי צ'בה\מנלאוס\קרנו בגיאומטריה כדורית והיפרבולית.]]