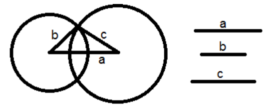
I

הקדמה. בניות גיאומטריות זו אומנות שהופיעה כנראה במצריים העתיקה כאשר ניסו לחלק את האדמות באמצעות חוטים ארוכים. יש שני כלים עיקריים:

א. סרגל
ב. מחוגה

סרגל מאפשר להעביר קווים (באורך גדול או אינסופי). מחוגה מאפשרת לצייר מעגלים ולהעתיק מרחקים.

שאלה 1. נתונים אורכי הצלעות של משולש. לבנות את המשולש.



פתרון.

שאלה 2. לחצות קטע באמצעות סרגל ומחוגה.

פתרון.

שאלה 3. להעביר אנך באמצעות סרגל ומחוגה.

פתרון.

הערה. כאשר אומרים "לבנות" בגיאומטריה, אם לא נאמר אחרת, הכוונה היא בנייה באמצעות סרגל ומחוגה. כמובן לא צריך להסביר על כל תנועה של מחוגה או של סרגל, אפשר להשתמש ישר בפרוצדורות ידועות.

שאלה 4. נתון קו ישר L ונקודה P מחוץ לו. לבנות ישר דרך P שמקביל ל-L.

פתרון. פעמיים אנך.

שאלה 5. לחלק את הקטע הנתון ל-3 חלקים שווים.

פתרון. משפט תלס.

שאלה 6. נתונים קטעים a, b לבנות קטע שאורכו $\sqrt{ab}$.

II

שאלה 7. לבנות גשר שמאונך לנהר בעל חופים מקבילים, ושני כבישים כך מרחק הליכה מ-A ל-B יהיה מינימלי.

פתרון. הזזה.

שאלה 8. נתונה זווית ונקודה P בתוכה. לבנות נקודות X, Y על הצלעות השונות של הזווית כך שהיקף של משולש XYP יהיה מינימלי.

פתרון. שיקוף

שאלה 9. נתונה נקודה K על צלע של משולש ABC. לבנות ישר דרך K שחוצה את שטח המשולש.
פתרון. תיכון וקו מקביל.
[שאלה 10. נתונים: נקודה P ושני ישרים. בנה משולש משוכלל שקודקוד אחד שלו הוא P ושתי קודקודיו האחרים על שני הישרים השונים.]

III

שאלה 11. לבנות משולש בהינתן 2 זוויות והיקפו.
פתרון ראשון. לבנות משולש דומה ולעשות הומותטיה.

פתרון שני.

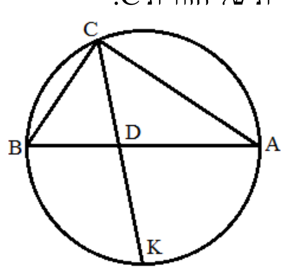

.

שאלה 12. לבנות משולש בהינתן אורכי שני צלעותיו ותיכון שביניהם.
פתרון – מקבילית.

שאלה 13. לבנות משולש בהינתן אורכי כל התיכונים.
פתרון – הזזות מקבילות.

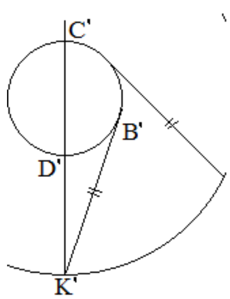
IV

שאלה 14. לבנות משולש ABC ישר זווית (C ישרה) בהינתן AB וחוצה זווית של הזווית C.



פתרון ראשון. חוצה זווית C עובר דרך אמצע הקשת AB של מעגל חוסם.
AB הוא הקוטר, לכן קל לבנות את K.
יהיה D חיתוך של CK ו-AB.
משולשים KCB ,KBD דומים. לכן KB / KD = KC / KB.

תמונה אחרת:



נבנה מעגל שקוטרו C'D', CD = C'D', ונחפש נקודה K' על המשך C'D' מעבר ל-D' כך ש-$K'C' \cdot K'D' = KB^2$. יהיה B' נקודה על המעגל כזאת ש-K'B' משיק. אז קל לראות ש-K'B'D' , K'C'B' דומים. לכן K'B' / K'D' = K'C' / K'B'. לכן כל מה שמגדיר את המרחק K'C' זה ש-K' אז נמצא על המעגל הקונצנטרי שהנקודות שלו הן נותנות אורל המשיק ששווה ל-BK.

פתרון שני. בתמונה הראשונה יהיה $KB = b$, $CD = l$, $KC = x$.
נתונים b, d וצ"ל x (אז יהיה קל לפתור). המשוואה היא $(x-d)x = b^2$.
זאת משוואה ריבועית ואנחנו יכולים לפתור אותה כי כבר הסברנו כיצד לחשב שורש.

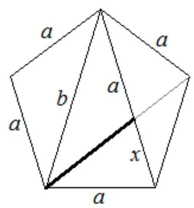
פתרון שלישי. נניח שהניצבים (הלא ידועים) הם a, b ואורך חוצה זווית l.
לפי חישוב שטחים $al + bl = ab\sqrt{2}$. מכאן קל לקבל $(a+b)^2 + \sqrt{2}l\cdot(a+b) - c^2 = 0$.
לכן אפשר למצוא $a+b$ על ידי פתרון של משוואה ריבועית. מכאן לא קשה לסיים.

V

שאלה 15. לבנות מחומש משוכלל.

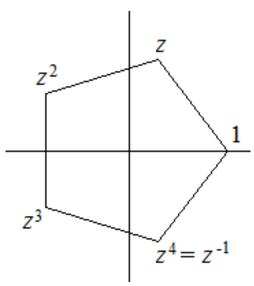
הערה. שאלה דומה – לבנות משולש משוכלל בעל 10 צלעות.

נציג שני פתרונות.



פתרון ראשון. בציור יש הרבה קווים מקבילים ומשולשים שווי-שוקיים. נסמן את אורך הצלע של מחומש ב-a, ואת אלכסון ב-b.
צלע ושני אלכסונים יוצרים משולש שווה שוקיים שגם חוצי זוויות שלו (מזוויות הבסיס) הם אלכסונים. לפי תכיוה של חוצה זווית יוצא $\frac{x}{a}=\frac{a}{b}$.

מצד שני $x + a = b$, ולכן $\frac{a^2}{b}+a=b$, כלומר $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}=1$. בעצם צריך לבנות את היחס $\frac{a}{b}$ ואז נוכל לבנות מחומש משוכלל. אבל הוא (אתם יודעים לפתור משוואה ריבועית) שווה $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ודברים כאלה אנחנו יודעים לבנות.



פתרון שני. נשתמש במתמטיקה קצת גבוהה (מספרים מרוכבים וטריגונומטריה).יהי z מספר מרוכב שאורכו 1 והארגומנט $\frac{2\pi}{5}=72^\circ$.
אז $1, z, z^2, z^3, z^4=1/z$ הם הקודקודים של מחומש משוכלל שמרכזו בראשית.

קל לראות כי $0=1+z+z^2+z^3+z^4=z+\frac{1}{z}+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-1$.

אבל $z+\frac{1}{z}=w=2\cos\left(72^\circ\right)$ והמספר הזה מקיים משוואה ריבועית $0=w^2+w-1$ לכן קל לחשב אותו $w=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. לכן $\sin\left(18^\circ\right)=\cos\left(72^\circ\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

אנחנו יודעים לבנות מספרים כאלה, לכן יודעים לבנות מחומש משוכלל.