<u>גיאומטריה של משולש</u>

נתון משולש. חוצי זוויות נפגשים בנקודה אחת, שנמצאת במרחק שווה מכל צלעותיו: והיא מרכז העיגול החסום.

לא נכון. יש 6 חוצי זוויות שנחתכות ב-4 נקודות, והם מרכזים של מעגלים (אחד חסום ועוד 3 חסומים מבחוץ).

בתמונה יש הרבה משיקים שווים. אורכיהם: x, y, z, p .

$$a = p - x \qquad b = p - y \qquad c = p - z$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$x = \frac{c+b-a}{2} \qquad y = \frac{c+a-b}{2} \qquad z = \frac{a+b-c}{2}$$

$$x + y = c \qquad x + z = b \qquad y + z = a$$

ואלה מספרים מאוד חשובים בגיאומטריה של משולש.

$$S = pr = r_a x = r_b y = r_c z$$

$$\frac{r}{x} = \frac{r_a}{p}\left(= \tan\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{z}{r_c} = \frac{y}{r_b}$$

לכן $\frac{pxyz}{rr_ar_br_c} = 1$ ובנוסף $pxyzrr_ar_br_c = S^4$ לכן $pxyz = S^2 = rr_ar_br_c$.

וזאת נוסחת הרון.

תשימו לב, שהרבה יותר נוח לרשום אותה באמצעות x, y, z מאשר a, b, c.

יש עוד נוסחאות לשטח למשל:

$$S = r^2 \cot\tfrac{\alpha}{2}\cot\tfrac{\beta}{2}\cot\tfrac{\gamma}{2} = p^2 \tan\tfrac{\alpha}{2}\tan\tfrac{\beta}{2}\tan\tfrac{\gamma}{2} =$$
$$= r_a^2 \cot\tfrac{\alpha}{2}\tan\tfrac{\beta}{2}\tan\tfrac{\gamma}{2} = x^2 \tan\tfrac{\alpha}{2}\cot\tfrac{\beta}{2}\cot\tfrac{\gamma}{2} =$$
$$\ldots$$
$$= R^2 \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{R^2}{2}\left(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma\right)$$

אבל גם $S = r^2\left(\cot\tfrac{\alpha}{2} + \cot\tfrac{\beta}{2} + \cot\tfrac{\gamma}{2}\right)$.

מסקנות: (1) $\cot\tfrac{\alpha}{2} + \cot\tfrac{\beta}{2} + \cot\tfrac{\gamma}{2} = \cot\tfrac{\alpha}{2}\cdot\cot\tfrac{\beta}{2}\cdot\cot\tfrac{\gamma}{2}$.

(2) $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$.

באמצעות x, y, z קל לחשב דברים על משולש. למשל:

$$4R = r_a + r_b + r_c - r$$

$$\frac{abc}{S}=\frac{S}{x}+\frac{S}{y}+\frac{S}{z}-\frac{S}{p}$$
$$abc=\frac{S^2}{x}+\frac{S^2}{y}+\frac{S^2}{z}-\frac{S^2}{p}$$
$$(x+y)(x+z)(y+z)=p(xy+xz+yz)-xyz$$
וזה קל.

בכלל, x, y, z מתאימים יותר מאשר צלעות לחישובים. אבל גם לאי-שוויונים! למשל:
$$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$$
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}<2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\right)$$
$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\le abc$$
אי-שוויונים ראשון ושני לא מתקיימים עבור שלושה מספרים חיוביים כלליים. אי-שוויון שלישי נכון גם למספרים חיוביים, אבל הוא לא ברור רק עבור צלעות המשולש.

באי-שוויון כזה צריך להשתמש באי-שוויון המשולש ולא ברור איך.

השיטה: לעבור ל-x, y, z. אז נקבל אי-שוויון שנכון עבור מספרים חיוביים, וזה יותר קל!

דוגמה: פותרים אי-שוויון שלישי, ומתרגמים לשפה של x, y, z.

דבר נוסף: עבור משולש פיתגורי, רדיוס של מעגל החסום גם שלם!
למשל רדיוס של מעגל החסום של 3, 4, 5 הוא 1.
רדיוס של מעגל החסום של 5, 12, 13 הוא 2.

שאלה נוספת: האם יכול להיות שלמשוואות ריבועיות $x^2\pm px\pm q=0$ השורשים שלמים לכל בחירה של סימנים?

מה הקשר בין שני שאלות האחרונות?

[ולסיום, מה זה שלשות פיתגורס? ואיך פותרים אותן ?]
[[ואם זווית של משולש 120°, למשל 3, 5, 7 ?]]