משפטי Ramsey

א.1. הוכח/י את **"משפט לחיצות היידיים":** שישה אנשים נכנסים לחדר, וכל שניים מביניהם יכולים או ללחוץ יד אחד לשני, או להסתפק בברכת שלום. אזי בכל סידור אפשרי של לחיצות ידיים וברכות שלום, תמיד קיימים שלושה אנשים שלחצו ידיים בינהם (כל אחד לחץ יד לכל אחד מהשניים האחרים) או שלושה אנשים שהסתפקו בברכות שלום בינהם (אף שניים מבינהם לא לחצו יד).

א.2. האם הטענה להעיל תקפה גם לכל חמישה אנשים שנכנסים לחדר? ועבור פחות מחמישה?

א.3. הוכח/י את **משפט רמזי הקלאסי**: לכל שני מספרים טבעיים n ו- m, קיים מספר טבעי r, כך שכל גרף בן r קודקודים בהכרח מכיל תת גרף מלא בן n קודקודים, או תת גרף ריק בן m קודקודים. (כלומר קיימים n קודקודים שכולם מחוברים אחד לשני בקשתות, או שקיימים m קודקודים שאף אחד מהם אינו מחובר לאף אחד אחר בקשת).

שימו לב כי "משפט לחיצות הידיים" מוכיח את המקרה הפרטי של משפט רמזי עבור $n=m=3$.

א.4. הוכח/י כי לכל $n_1,n_2,\dots,n_k$ מספרים טבעיים, קיים מספר טבעי r, כך שבכל גרף בן r קודקודים שקשתותיו נצבעו ב- k הצבעים $c_1,c_2,\dots,c_k$ קיים צבע c_i כך שקיים תת-גרף בן n_i קודקודים שכל קשתותיו צבועות ב- c_i.

שימו לב כי המשפט הקודם הוא מקרה פרטי של המשפט להעיל, עבור $k=2$.

ב.0. גרף הוא זוג של שתי קבוצות - קבוצת קודקודים וקבוצת קשתות החלקית לקבוצת כל הזוגות האפשריים בין שני קודקודים. ניתן להכליל הגדרה זו ל"היפר-גרף" באופן הבא: **הייפר-גרף מסדר d** הוא זוג של שתי קבוצות – קבוצת קודקודים, וקבוצת הייפר-קשתות מסדר d, החלקית לקבוצת כל ה-d-יות האפשריות בין d קודקודים.

כלומר הכללנו את הקשת, שמסורתית מחברת בין שני קודקודים, ל"הייפר-קשת" שמחברת בין d קודקודים.

ב.1. הוכח כי לכל n,m ו- d טבעיים, קיים r טבעי, כך שלכל הייפר-גרף מסדר d בן r קודקודים קיים תת הייפר-גרף מלא בן n קודקודים או תת הייפר-גרף ריק בן m קודקודים.

ב.2. האם גם במקרה של ההיפר-גרף ניתן להכליל את המשפט עבור k צבעים?

ב.3. הסבר מדוע משפטי רמזי והכללותיהם מהווים סוג של הכללה לעקרון דיריכלה (המכונה גם "שובך היונים" או "עקרון המגירות").

ג.1. הוכח/י: $R(Aleph_0, Aleph_0) = Aleph_0$, או בניסוח תקני: בכל צביעה של זוגות כל המספרים הטבעיים בשחור ולבן, נוכל למצוא קבוצת מספרים אינסופית שבה כל הזוגות צבועים בלבן, או קבוצת מספרים אינסופית שבה כל הזוגות צבועים בשחור.

ג.2. האם הגרסא האינסופית עובדת גם ב"הייפר-גרפים", כלומר האם בכל צביעה של כל d-יות (לא סדורות) של המספרים הטבעיים בשחור ולבן, נוכל למצוא קבוצת מספרים אינסופית שבה כל ה-d-יות צבועות בלבן, או קבוצת מספרים אינסופית שבה כל ה-d-יות צבועות בשחור.

ג.3. האם ההכללה לריבוי צבעים עובדת גם בגרסא האינסופית?

ד.1. הוכח/י שמכל חמישיית נקודות במישור שאף שלוש מהן אינן נמצאות על ישר אחד, ניתן לבחור ארבע נקודות היוצרות ביניהן מרובע קמור.

ד.2. הוכח/י את "בעיית הסוף הטוב": לכל n טבעי, קיים r טבעי, כך שמכל r נקודות במישור שאף שלוש מהן אינן נמצאות על ישר אחד (ולהלן: נקודות ב"מצב כללי") קיימות n נקודות היוצרות ביניהן מצולע קמור.

זו כבר בעיה מעט יותר מורכבת להוכחה ממה שעשינו עד כה, וספק רב אם במגבלות הזמן יצליח מישהו לעלות על הוכחה. ישנן מספר הוכחות יפות, ואני אכוון אתכם לאחת חמודה במיוחד בעזרת הרמזים הבאים: