קבוצות סדורות חלקית

שאלה (איראן 2006) נתון אוסף סופי S של קטעים בישר הממשי, ומספר טבעי k כך שבין כל k+1 קטעים מתוך S יש שניים שנחתכים. הוכיחו כי קיימת קבוצה F בת k איברים של נקודות בישר, שנחתכת עם כל קטע מתוך S.

שאלה (רומניה 2005) נתונה קבוצה S של n^2+1 מספרים טבעיים, כך שבין כל n+1 מתוכם יש שניים כך שאחד מחלק את השני. הוכיחו כי קיימת סדרה בת $n+1$ איברים מתוך S כך ש- $a_1 | a_2, ..., a_n | a_{n+1}$.

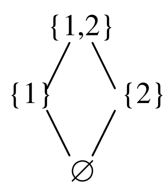
הגדרה: יחס סדר חלקי על קבוצה S ≥ הוא יחס שמקיים את התכונות הבאות:
1) רפלקסיביות + אנטי-סימטריות חלשה: a≥b וגם b≥a ⇔ a=b
2) טרנזיטיביות: c≥b≥a גורר c≥a

S בעלת יחס סדר חלקי נקראת "סדורה חלקית" (Partially Ordered Set או POSET)
כל הקבוצות בהרצאה הן סופיות.

יחס הסדר הוא חלקי, במובן שלא כל שני איברים מהקבוצה ניתנים להשוואה. באותו זמן, ייתכן שיש מישהו גדול משניהם.

דוגמאות: 1. קבוצות של מספרים עם סדר רגיל.
2. תתי קבוצות של קבוצה A, עם יחס של הכלה.
3. חפיסת קלפים עם סדר רגיל. מלך לב גדול מכל נסיך, אבל שני נסיכים שונים אינם ניתנים להשוואה.

שפן הדגמות S:



דיאגרמת Hasse: הצגה סכמטית של קבוצה סדורה חלקית קטנה.

שרשרת $C \subset S$ היא תת-קבוצה של איברים שכל שניים מהם ניתנים להשוואה.
אנטי-שרשרת $A \subset S$ היא תת-קבוצה שכל זוג איברים (שונים) בה אינו ניתן להשוואה.
המושגים של שרשרת ואנטי-שרשרת סגורים ללקיחת תת-קבוצה.

הגובה של S הוא אורך השרשרת המינימלית (בשביל השפן Height(S)=3)
הרוחב של S הוא אורך האנטי-שרשרת המינימלית (בשביל השפן Width(S)=2)

בנוסף, נגדיר: ACN(S) הוא הכיסוי המינימלי של S ע"י אנטי-שרשראות (אפשר להניח שכולן מקסימליות, או לחלופין שכולן זרות). לפעמים נתכוון לגודל הכיסוי.
CCN(S) הוא גודל הכיסוי המינימלי ע"י שרשראות (שוב, אפשר להניח שכל השרשראות זרות, או שכולן מקסימליות).
1. משפט Mirsky: Height(S)= ACN (S)
2. משפט Dilworth: Width(S)=CCN(S)

כיוונים טריוויאלים:
1. בהינתן כיסוי מינימלי ע"י אנטי-שרשראות {A}, שרשרת C יכולה לחתוך כל A בנקודה אחת בלבד. לכן ACN(S)≥ Height(S).

2. בהינתן כיסוי מינימלי ע"י שרשראות {C}, אנטי-שרשרת יכולה לחתוך כל אחד בנקודה אחת בלבד. לכן CCN(S)≥ Width (S).

דוגמא: משפט Sperner האנטי-שרשרת הכי ארוכה בקבוצת תתי הקבוצות של {1,…,n} עם יחס הכלה, היא מגודל $N=\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

ברור איך לבנות כזו אנטי-שרשרת. מכיון שכל שרשרת מכילה לכל היותר תת-קבוצה אחת מגודל נתון, ויש N קבוצות מגודל n/2, יש לפחות N שרשראות בכל כיסוי.
דרך להוכיח את משפט ספרנר היא ע"י אי-שוויון שראיתם: אם $\{A_i\}$ אנטי-שרשרת, אז $\sum_i \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \le 1$. ההוכחה היא כזו: יש לכל היותר $|A_i|!(n-|A_i|)!$ שרשראות מקסימליות שמכילות את A_i, וכל שתי שרשראות כאלו הן זרות.

הוכחת הכיוונים המעניינים:

1. Mirsky: לכל איבר $x \in S$, נתבונן בכל השרשראות שעבורן x מקסימלי ({x} היא שרשרת כזו), ונבחר C(x) להיות שרשרת כזו מאורך מקסימלי, שיסומן L(x).

טענה: L(x)=L(y) x,y ⇐ אינם ניתנים להשוואה או x=y. זה ברור, כי אם x<y (כלומר y≠x ובנוסף y≥x) אז $C(x)\cup\{y\}$ היא שרשרת מאורך L(x)+1 שעבורה y מקסימלי.
קיבלנו פירוק טבעי של S לאנטי-שרשראות, $\cup_{l\in\mathbb{N}}\{x: L(x)=l\}$, וגודל הכיסוי הוא כאורך השרשרת המקסימלית ב-S, כלומר Height(S).

2.Dilworth : ההוכחה היא באינדוקציה על הגודל של S. בסיס האינדוקציה טריוויאלי. נניח |S|=n+1 נבחר איבר מקסימלי a מתוך S (כזה שאין מישהו יותר גדול). נסמן T=S\{a}.
ע"פ ההנחה, T מכוסה ע"י k שרשראות זרות $\{C_j\}$, וקיימת אנטי-שרשרת A מגודל k שחותכת כל C_j. עבור כל j, נבחר תהי x_j נקודת החיתוך המקסימלית האפשרית של C_j עם אנטי-שרשרת מקסימלית (מאורך k) כלשהי ב-T: $x_j = C_j \bigcap A_j$.
טענה: $\{x_j\}_{j=1}^k$ היא אנטי-שרשרת.
סיבה: אם $x_i < x_j$ ונסמן $y = A_j \cap C_i$ אז $y \le x_i$ (מהגדרת x_i) ולכן $y < x_j$ בסתירה לכך ש-A_j אנטי-שרשרת.
כעת נוסיף את a בחזרה. אם a לא ניתן להשוואה עם אף x_j אז $\{x_j\}_{j=1}^k \cup \{a\}$ אנטי-שרשרת מגודל k+1, ואילו $\{C_j\}\cup\{a\}$ כיסוי ע"י k+1 שרשראות.
אם $a > x_i$, נגדיר $C_i' = \{a\}\cup\{x\in C_i : x \le x_i\}$. זוהי בבירור שרשרת. נראה שלמשלים $R = S \setminus C_i'$ יש כיסוי ע"י k-1 שרשראות, ואז ל-S יש כיסוי ע"י k שרשראות, ואנטי-שרשרת בגודל k. ע"פ הנחת האינדוקציה, אם יש אנטי-שרשרת B מגודל k בתוך R, אז B היא בפרט בתוך T, ולכן חותכת כל C_j בנקודה אחת בדיוק, אבל החיתוך שלה עם C_i לא יכול להיות גדול מ-x_i, אבל גם לא יכול להיות בתוך C_i'. לכן כל אנטי שרשרת ב-R היא מגודל k-1 לכל היותר, ולפי הנחת האינדוקציה ל-R יש כיסוי ע"י k-1 שרשראות.

ניסוח קצת שונה. הפעם, באינדוקציה על הרוחב של S. נניח שהוא שווה אחד, כלומר הסדר הוא מלא, ולכן S היא שרשרת. נניח שהוכחנו ל- w-1, נראה ל- w. נבחר אנטי שרשרת מאורך מקסימלי A. נסמן U(A) – איברים מ-S שגדולים מאיבר ב-A, B(A)- איברים שקטנים מאיבר ב-A. בבירור A, B, U

קבוצות זרות שמחלקות את המרחב (זרות כי A אנטי-שרשרת, מחלקות כי כל איבר ב-S ניתן להשוואה לאיבר כלשהו ב-A, כי A מקסימלית).
אם קיימת A כזו כך ש-U,B לא ריקות אז ניתן להפעיל את הנחת האינדוקציה פעמיים: ניתן לחלק את $A \cup U$ ל- w שרשראות C_j. כל שרשרת חייבת לחתוך את A (כי זה כיסוי, ויש רק נקודת חיתוך אחת לכל שרשרת), ולכן נקודת החיתוך היא מינימלית בתוך השרשרת המתאימה: $a_j = \min C_j$. באותו אופן, $A \cup B$ (שוב לפי הנחת האינדוקציה) מחולקת לשרשראות D_j כך ש- $a_j = \max D_j$. לכן $C_j \cup D_j$ שרשרת, וסיימנו.

אם לכל אנטי-שרשרת A אחת הקבוצות U או D ריקה, נבחר איבר מקסימלי M , ומבין כל אלו שקטנים או שווים לו נבחר את המינימלי m. אז C={m,M} שרשרת מגודל 1 או 2. כמו כן, P=S\C היא מרוחב w-1 לכל היותר: אם יש שם אנטי-שרשרת בגודל w, היא גם אנטי-שרשרת בתוך S. אם היא מקסימלית כאנטי-שרשרת (אין איברים יותר גדולים), אז (A,M) גם אנטי-שרשרת, סתירה.
אם A אנטי-שרשרת מינימלית, אז לא ייתכן m<A וגם m>A כי אז M>m>A בסתירה לבחירת m.
ולפי הנחת האינדוקציה, ניתן לבנות כיסוי ל-P מגודל w-1. ביחד עם C, קיבלנו w-כיסוי של S.

משפט החתונה של Hall: עבור גרף דו-צדדי על $L \cup R$ שמקיים |N(S)|≥|S| לכל $S \subset L$ (כאן N(S) השכנים של קבוצה), ניתן לבנות פונקציה חח"ע $f : L \to R$ כך ש $(x, f(x))$ הן קשתות.
הוכחה: נגדיר יחס סדר חלקי: l<r אם הם מחוברים בקשת. אז גודל אנטי-שרשת מקסימלית הוא |R|: אם
$L' \cup R'$ היא אנטי-שרשרת, אז $N(L') \cap R' = \varnothing$ ולכן
$|L' \cup R'| = |L'| + |R'| \le |N(L')| + |R'| \le |R|$.
מכאן שקיים כיסוי ע"י |R| שרשראות. שרשראות הן זוגות מחוברים או קודקודים בודדים. ב-R יש לפחות |R|-|L| קודקודים בודדים, אם כל קודקוד מ- L נמצא בזוג, אחרת פחות. כל קודקוד מ-L מייצג שרשרת אחת בדיוק. לכן ברור שכל קודקוד מ-L נמצא בזוג, מש"ל.

שימוש: חלוקה הוגנת של זהב.
בהינתן ערימת זהב, ו-N פיראטים, אפשר לבצע חלוקה הוגנת באופן הבא. פיראט מספר 1 מחלק את הערימה ל-N ערימות שוות להערכתו. לכל ערימה, יש קבוצה לא ריקה של פיראטים שיסכימו לקבל אותה (לא ריקה כי פיראט מספר 1 מוכן לקחת כל ערימה). ניקח קבוצה מינימלית ביחס להכלה של ערימות, P, עבורה מספר הפיראטים M(P) שמוכנים לקחת ערימה אחת ממנה מקיים $M(P) \le |P|$ (יש כזו כי קבוצת כל הערימות מקיימת את התנאי). כל תת-קבוצה (ממש) T של P מקיימת $M(T) > |T|$.
טענה: M(P)=|P|. אם P בת ערימה אחת, זה ברור. אחרת, תהי Q תת קבוצה מגודל |P|-1 של P. אז $M(P) \ge M(Q) > |Q| = |P| - 1$ ולכן M(P)=|P|. מכאן לפי משפט החתונה שניתן לחלק את הערימות של P לפיראטים המעוניינים; וכל שאר הפיראטים לא רוצים את הערימות האלה, לכן הם לא יתנגדו לאחד את הערימות שנותרו ולהמשיך רקורסיבית.

משפט Erdos-Szekers: בכל סדרה של ab+1 מספרים ממשיים יש תת-סדרה לא-יורדת של a+1 מספרים, או תת-סדרה יורדת של b+1 מספרים.
הוכחה. נגדיר יחס סדר על הקבוצה: $a_i \prec a_j$ אם $i \le j$ וגם $a_i \le a_j$.
שרשרת = סדרה לא יורדת.
אנטי-שרשרת = סדרה יורדת.
אם נניח שאורך שרשרת הוא לכל היותר a, לפי מירסקי קיים כיסוי ע"י a אנטי-שרשראות, ולכן אחת מכילה לפחות b+1 איברים.
אפשר ללכת גם מהכיוון השני: אם אורך כל אנטי-שרשרת הוא לכל היותר b, לפי דילוורט' קיים כיסוי ע"י b שרשראות, ולכן לאחת מהן אורך לפחות a+1.

בעיה: צביעת גרף. נניח שהמספר הכרומטי של גרף פשוט G הוא k. בהינתן k-צביעה, הוכיחו שיש מסלול עם k קודקודים מצבעים שונים.

הוכחה: נמספר את הצבעים, ונגדיר סדר בין קודקודים כך: u>v אם קיים מסלול ביניהם שהצבעים עולים לאורכו. ע"פ הנתון, כל שני קודקודים מחוברים ניתנים להשוואה (כי הם מצבעים שונים). קודקודים מצבע זהה אינם ניתנים להשוואה. לכן הצבעים מגדירים חלוקה של הגרף ל-k אנטי-שרשראות. טענה: אי אפשר לחלק לפחות אנטי-שרשראות, שכן חלוקה כזו תגדיר צביעה בפחות צבעים (כאמור, כל שני איברים של אנטי-שרשרת אינם מחוברים). לכן קיימת שרשרת מאורך k, כנדרש.