TL = tangent line method = שיטת המשיק

1. נתון $a,b,c\ge 0$, $ab+bc+ca\ne 0$, הוכח כי $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.

2. נתון $a,b,c>0$, הוכח כי $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$.

3. נתון $a,b,c\ge 0$, $a+b+c=3$, הוכח כי $\frac{a}{2a^2+1}+\frac{b}{2b^2+1}+\frac{c}{2c^2+1}\le 1$.

4. נתון $a,b,c>0$, $abc=1$, הוכח כי $\sqrt{1+3a^2}+\sqrt{1+3b^2}+\sqrt{1+3c^2}\le 3(a+b+c)$.

MV = mixing variables = שיטת עירבוב משתנים

1. נתון $a,b,c\ge 0$ הוכח כי

$$a^3+b^3+c^3-a^2b-a^2c-b^2a-b^2a-c^2a-c^2b+3abc\ge 0$$

2. נתון $a,b,c>0$ הוכח כי

$$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ge 2(ab+ac+bc)$$

3. נתון $a,b,c>0$, $abc=1$ הוכח כי

$$a^2+b^2+c^2+6\ge\frac{3}{2}\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

B = Buffalo = שיטת ההפרשים

1. נתון: $a,b,c\ge 0$. הוכח כי $a^3+b^3+c^3-a^2b+a^2c-b^2a-b^2c-c^2a-c^2b+3abc\ge 0$.

2. נתון: $a,b,c>0$. הוכח כי $\frac{a}{4a+4b+c}+\frac{b}{4b+4c+a}+\frac{c}{4c+4a+b}\le\frac{1}{3}$.

עבודה עצמית

1. נתון $a,b,c\ge 0$, $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$,

הוכח כי $\frac{1}{4a+1}+\frac{1}{4b+1}+\frac{1}{4c+1}\ge 2$ (TLM).

2. נתון $a,b,c\ge 0$, $a^2+b^2+c^2=3$, הוכח כי $\frac{1}{4a+1}+\frac{1}{4b+1}+\frac{1}{4c+1}\ge 2$.(SDS).

3. נתון $xyz=1$, $x,y,z>0$. הוכח כי $\frac{1}{\sqrt[3]{1+2bx}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1+2by}}+\frac{1}{\sqrt[3]{1+2bz}}\ge 1$ (AM-GM).

4. נתון $a,b,c,d>0$. הוכח כי $\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b}\ge 0$ (G-S).

5. $x+y+\sqrt{2x^2+2xy+3y^2}=4$; $x,y>0$. מצא את הערך המכסימלי של x^2y (H) .

6. נתון $abc=1$, $a,b,c>0$.

הוכח כי $\sqrt{1+8a^2}+\sqrt{1+8b^2}+\sqrt{1+8c^2}\le 3(a+b+c)$ (TL)

7. נתון $abc=1$, $a,b,c>0$

הוכח כי $a^2+b^2+c^2+15(ab+ac+bc)\ge 16(a+b+c)$ (MV)

8.* הוכח כי עבור כל x,y,z ממשיים מתקיים $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\ge 3\left(x^3y+y^3z+z^3x\right)$ (B)

9. נתון $a,b,c>0$ הוכח כי $\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{13}{22}}+\left(\frac{2b}{a+c}\right)^{\frac{13}{22}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{13}{22}}\ge 3$ (AM-GM)

10. נתון $a+b+c+abc=1$, $a,b,c>0$ מצא את הערך המינימלי של $a^3+b^3+c^3$.

מיכאל 15.6.2011

שאלה. נניח כי $a,b,c\ge 0$ ובנוסף $ab+bc+ca\neq 0$.

הוכח כי $\frac{a+b}{\sqrt{c^2+3ab}}+\frac{a+c}{\sqrt{b^2+3ac}}+\frac{b+c}{\sqrt{a^2+3bc}}\ge 3$

פתרון.

$$\sum_{cyc}\frac{a+b}{\sqrt{c^2+3ab}}\ge\sum_{cyc}\frac{12(a+b)(a+b+c)}{2\cdot 2(a+b+c)\cdot 3\sqrt{c^2+3ab}}\ge\sum_{cyc}\frac{12(a+b)(a+b+c)}{4(a+b+c)^2+9(c^2+3ab)}\ge$$

$$\ge\sum_{cyc}\frac{12(a+b)(a+b+c)}{4a^2+4b^2+13c^2+35ab+8ac+8bc}\ge 3$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{cyc}\frac{12(a+b)(a+b+c)-4a^2-4b^2-13c^2-35ab-8ac-8bc}{4a^2+4b^2+13c^2+35ab+8ac+8bc}\ge 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{cyc}\frac{8a^2+8b^2-13c^2-11ab+4ac+4bc}{4a^2+4b^2+13c^2+35ab+8ac+8bc}\ge 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{cyc}\frac{16(a^2+b^2-2c^2)+3(2c^2-2ab)+8(ac+bc-2ab)}{4a^2+4b^2+13c^2+35ab+8ac+8bc}\ge 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{cyc}\frac{16((b-c)(b+c)-(c-a)(a+c))+3((c-a)(b+c)-(b-c)(a+c))+8(b(c-a)-a(b-c))}{4a^2+4b^2+13c^2+35ab+8ac+8bc}\ge 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{cyc}\frac{(b-c)(-11a+16b+13c)-(c-a)(16a-11b+13c)}{4a^2+4b^2+13c^2+35ab+8ac+8bc}\ge 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{cyc}(a-b)\left(\frac{-11c+16a+13b}{4c^2+4a^2+13b^2+35ac+8ab+8bc}-\frac{16b-11c+13a}{4b^2+4c^2+13a^2+35bc+8ab+8ac}\right)\ge 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2\left(103c^2-142(a+b)c+52a^2+95ab+52b^2\right)}{\left(4c^2+4a^2+13b^2+35ac+8ab+8bc\right)\left(4b^2+4c^2+13a^2+35bc+8ab+8ac\right)}\ge 0$$

כלומר, נשאר להוכיח $71^2(a+b)^2-103(52a^2+95ab+52b^2)\le 0$.

שזה שקול ל- $315a^2-297ab+315b^2\ge 0$ שזה נכון כיוון ש- $297^2-4\cdot 45^2<0$.

עוד דרך (באמצעות אי-שוויון הולדר)

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a+b}{\sqrt{c^2+3ab}}\right)^2\sum_{cyc}(b+c)\left(a^2+3bc\right)(3a+2b+2c)^3\ge\left(\sum_{cyc}(b+c)(3a+2b+2c)\right)^3$$

כלומר נשאר להוכיח כי $\left(\sum_{cyc}(b+c)(3a+2b+2c)^3\right)^2\ge 9\left(\sum_{cyc}(b+c)(3a+2b+2c)\right)^3$

וזה SOS.

שאלה. $x,y>0$, ובנוסף $x^2+y^3\ge x^3+y^4$. הוכח כי $x^5+y^5\le 2$.

פתרון. $x^2+y^2\ge x^3+y^4+y^2-y^3\ge x^3+y^3$. לכן $x=ky$ כאשר $k>0$.

אז $k^2y^2+y^2\ge k^3y^3+y^3$ ולכן $\frac{k^2+1}{k^3+1}\ge y$.

כלומר נשאר לבדוק כי $k^5\left(\frac{k^2+1}{k^3+1}\right)^5+\left(\frac{k^2+1}{k^3+1}\right)^5\le 2$.

נתבונן בפונקציה $f(k)=\ln\left(k^5+1\right)+5\ln\left(k^2+1\right)-5\ln\left(k^3+1\right)-\ln 2$.

$$f'(k)=\frac{5k^4}{k^5+1}+\frac{10k}{k^2+1}-\frac{15k^2}{k^3+1}=\frac{-5k\left(2k^6-3k^5+3k-2\right)}{\left(k^5+1\right)\left(k^2+1\right)\left(k^3+1\right)}=\frac{-5k(k-1)^3\left(2k^2+k+2\right)}{\left(k^5+1\right)\left(k^2+1\right)\left(k^3+1\right)}$$

כלומר $k_{\max}=1$ ו- $f(k)\le f(1)=0$ ואי-שוויון מוכח.

אם אותם אילוצים $x^6+y^6\le 2$ כבר לא מתקיים: $\begin{matrix}x=0.941\\ y=1.0456\end{matrix}$.

1. $a,b,c>0$ וגם $\frac{1}{1+b^2+c^2}+\frac{1}{1+a^2+c^2}+\frac{1}{1+a^2+b^2}\geq 1$. הוכח כי $ab+bc+ca\leq 3$.

2. $a,b,c>0$ וגם $abc\geq 1$. הוכח כי $\frac{1}{c+a^4+b^4}+\frac{1}{b+a^4+c^4}+\frac{1}{a+b^4+c^4}\leq 1$.

3. $a,b,c\geq 0$. הוכח כי $(ab+bc+ca)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)27\leq (a+b+c)^6$.

4. $a,b,c>0$. הוכח כי $\sqrt[4]{27\left(a^4+b^4+c^4\right)}\leq \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$.

5. $a,b,c\geq 0$, וגם $a+b+c=3$. הוכח כי $a\sqrt{b^3+1}+b\sqrt{c^3+1}+c\sqrt{a^3+1}\leq 5$.

6. $a,b,c\geq 0$. הוכח כי $(a+b+c)^5\geq 27(ab+bc+ca)\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$.

7. $a,b,c,d,e\geq 0$. הוכח כי $(a+b+c)^3\geq 25(abc+bcd+cde+dea+eab)$.

8. $a,b,c>0$, וגם $abc=1$. הוכח כי $\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leq 1$.

9. $a,b,c>0$, וגם $abc=1$. הוכח כי $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq a+b+c$.